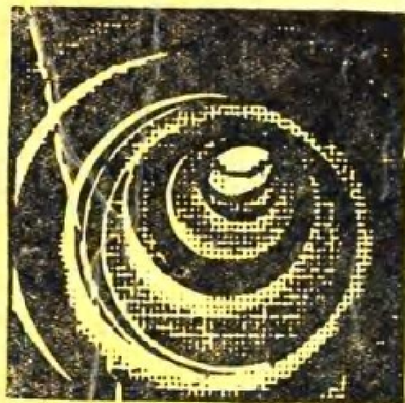
δ函数的新理论

三原色丛书

黄乘规 著



三原色丛书

δ函数的新理论

黄乘规 著

陕西科学技术出版社

责任编辑：何　越
封面设计：高尚德
版面设计：惠红彦

《三原色丛书》
δ 函数的新理论
黄乘规　著
陕西科学技术出版社出版发行
（西安北大街131号）
新华书店经销　　西安青山彩印厂印刷
787×1092 毫米　窄 32 开本　5.125 印张　2插页　7.4万字
1992年6月第1版　　1992年6月第1次印刷
印数：1—2,000
ISBN　7-5369-0425-8/Z·45

定　价：3.10元

目　录

1

历史导言



我国的思想家唐太宗早就明确指出：以古为镜知兴衰。法国著名数学家 Herri Poincare 又指出：如果我们想要预见数学的将来，适当的途径是研究这门科学的历史和现状。因此，本文就从微积分学基础的发展史谈起。

Robinson 在[80]中精辟地论述了微积分基础的发展史，他清楚地揭示了微积分的形成和发展是与人类对“无限（或叫无穷，infinite）”的认识不断深入密切相关的。

关于人类对“无限”的认识，Robinson 追溯到古希腊，他指出：Aristotle（384-322 B. C.）反对实在无限（Actual infinite）

而承认潜在无限（potential infinite）。然而，世所公认，在Aristotle之前，Democritus（460-362 B. C.）主张：数量是由实在无限小的单子（monad）所组成。以后又有著名的Archimedes（287-212 B. C.）公理，它的含义是：对任意二实数a和b，$0<a<b$，存在一个自然数n，使得$b<na$。

Robinson生活在欧美和地中海沿岸，不了解“无限”概念在中国的发展，作者在此作点补充。张锦文在[31]中介绍过墨翟（480—420 B. C.）的关于“无穷”的思想，在“墨子闲诂”[41]中有以下语句

（1，1）　穷，或有前，不容尺也。

（1，2）　穷：或不容尺，有穷；莫不容尺，无穷也。

现将（1，1）和（1，2）依次翻译如下

（1，3）　有端的距离称之为有穷，如果用尺一尺接一尺地去量它，量到某一次之后，剩下的距离不再超过一尺。

（1，4）　关于有穷与无穷：用尺一次接一次去量某个距离，如果量到某一次之后所剩下的不再超过一尺，就叫有穷；如果量到任一次之后所剩下的

总是超过一尺，就叫无穷。

现在把（1，3）用现代数学语言表达如下：

（1，5）　任意有穷的距离 x，用长度为 ε 的尺一次接一次去量它，存在一个次数（自然数）n，使得

$$0<x-n\varepsilon\leqslant\varepsilon。$$

（1，1）和（1，2）是墨翟关于有穷和无穷的定义，现在看来仍然是相当科学的。特别，（1，1）与 Archimedes 公理十分相象，如果征得世界上多数数学家的同意，可以把 Archimedes 公理称之为墨翟—Archimedes 公理。墨翟关于无穷的论述被正式记录在墨经里（见[41]），从时间上讲多半在 Democritus 之前，而 Democritus 的思想是后人追述的。

关于微积分学的发展史，在[80]的最后一章，Robinson 有一个简明的总结，今介绍如下：

“关于在特殊情形下寻求面积、体积和切线，有一个漫长的发展阶段，后来，微分和积分的一般理论，在十七世纪的后半叶中，先由 Newton，稍后由 Leibniz 提出。就这门新学科的基础而言，Newton 是游移不定的，他有时提到无穷小，有时提到极限，有时提到物理

直观。Newton的紧密追随者，更喜欢最后一个方法。另一方面，Leibniz及其追随者，在一阶和高阶的无穷小微分的基础上发展了微积分理论。他所用的记号，有着技术上的优越性（作者认为是一种优美的数学语言），在欧洲大陆被采用，促进了微积分的理论和应用，使之在欧洲大陆上迅速发展。但不久之后，这个理论内暴露出明显的矛盾（即众所周知的无限小悖论），使人们感到要另打基础。Lagrange自信他已经发现了一条合适的道路，这就是把函数的Taylor展开当作基本出发点。然而，这个问题满意的解决应归功于Chauchy，他第一次严谨地构成了数学分析，其理论建立在极限概念之上，此概念自Newton提出后，曾得到d'Alembert的拥护。Chauchy的方法，后来由Weierstrass给以更加形式化的处理，但在Weierstrass之前，Bolzano已在一定程度上作过这种处理了。在极限理论确立之后，分析学中就再也不相信无限小和无限大了，后者只是一种说话的方式，例如'某变量趋向于无穷大'等等。非Archimedes域（即包含实在无限大的数域）此后的发展，完全局限在代数学的范围之内。"

紧接着Robinson十分谦逊地谈到了他自己的工作："我们相信，我们已经证明：某些非Archimedes域的理论，确实能给古典分析作出肯定的贡献。"

1972年在评述Robinson的工作时（见[75]），Martin Davis和Reuben Hersh是这么说的："从十九世纪起无穷小似乎被一劳永逸地赶出了数学，为了合乎逻辑，Newton和Leibniz的'无穷小演算'被Weierstrass抛却'无穷小'而重新构成。但正是当代数理逻辑的新的技巧和能力，又恢复了'无穷小'概念，使之能为人们所接受。在某种意义上，Robinson已经为被轻率抛弃了的十八世纪的数学作了辨护，以反对十九世纪的过分拘束的严格数学，从而在永无休止的关于有穷和无穷、连续和离散的争论之中又加入了新的篇章。"

从Abrahan Robinson，Martin Davis和Reuben Hensh等人的评述中可以看出，关于微积分基础的发展，他们似乎有一条认识上的红线，从Newton，Leibniz，Taylor，Lagrange，d'Alembert，Cauchy，Bolzano经Weierstrass而直奔Robinson。从Weier-

strass 到 Robinson，其中将近有一百年，这是人类思想十分活跃的时期，其中微积分的发展有哪些值得回忆的事件呢？Robinson 把这个留给我们去作补充。另一方面，Robinson 的明确的目标是完成 Leibniz 的未竟之业，恢复“无穷小”的信誉，因此把研究重点放在古典分析学上面。怎么把“无限小”概念与当代各门学科发展的主流密切结合起来，Robinson 来不及完成这项任务就与世长辞了

其实，实在无限小和无限大，作为人类思想的一股潮流，几千年来一直存在着，从十九世纪起仅仅被逐出了微积分的大门，在人类思想史中只是一个暂时的和局部的历史现象。在其他学科中远非如此。特别是在物理类型的理论和应用学科中，无限的概念仍然合法地存在着，微元法、微扰论和无穷小变换等经常被使用；最引人注目的是 1926 年，Dirac 直接在无限大的基础上引入了 Delta 函数，它在物理中得到广泛应用并取得了很大的成功。这对于与 Dirac 同时代的分析学家是很大的冲击。由于这时分析学家认为无限小和无限大是非法的，他们试图在标准分析的框架之内，排除 Dirac 的朴素的无限大，来说明 Delta 函数。

1932年Von Neumann在[90]中说了一段有趣的话："Dirac的方法在数学严格性方面是不能令人满意的，……它要求引进具有自相矛盾性质的'奇异函数'，在Dirac的手法中经常要注入这样一种数学上的'捏造'，甚至在确定实验的数值计算中也如此处理。尽管这些概念为现今的分析框架所不容，但在物理上却是内在的需要，那么也不应当提出非议，正象Newton力学首先带来无穷小分析的发展，后者的原始形态不能自圆其说，因而受到怀疑。所以对于量子力学也可能会提出一个'无穷多个变数的分析学'的新结构——即必须改变的是数学技巧而不是物理理论。"

1926年，经Dirac之手，Delta函数进入了人类的思想史册。在Dirac之前，它有一个很长的孕育时期。首先是在奇异积分核的研究中就含有原始的Delta函数的概念。1815—1816年，Cauchy和Poisson在研究波的传播理论中已隐藏着这种思想。

1887年，M. Hermite在巴黎大学的讲义里写得比较明确

"当 $\lambda\to 0$ 时，积分

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{2i\lambda}{(t-\theta)^2+\lambda^2}dt$$

并不总是零；事实上，若θ介于α与β之间，它与$2\pi i$差一无穷小量，所以称之为奇异积分，积分号里的东西除了$t=\theta$都是0，只有在这点它是无穷。”

上世纪末，英国物理学家，电机工程师Heaviside在解电路方程以及其他数学物理方程问题时，提出了一套运算微积的法则。这种方法行之有效，能够处理大量的常系数微分方程，但缺乏严格的数学基础。1893年，Heaviside在他的算符演算（见[67]）中，把后人称之为Delta函数的东西，解释为脉冲电流。

在[58]和[59]中，Dirac明确提出了Delta函数的概念。1947年在[59]中Dirac明确指出：“我们的工作要求我们去研究一些包含有某种无穷大的量。在处理这些无穷大时为了得到一个精确的符号，我们引入一个量$\delta(x)$，它由一个参量x决定，并满足以下条件

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1\\ \delta(x)=0,\text{ 当 } x\neq 0\end{cases}$$”

由于物理学内在的发展，Dirac已明确提出要研究无穷大量了，而与他同时代的分析学家却认为无穷大是非法的。怎么在标准分析的

框架之内，排除 Dirac 的直观的无穷大思想，来合理地解释 Delta 函数呢？于是自然地展开了一场标准分析的保卫战，投入这个神圣行列的有 Sobolev，Schwarz，Gelfand 和 Mikusinski 等著名分析学家。

1936 年，Sobolev 在[84]中提出了具有紧致支撑的无穷次可微的函数空间上的连续线性泛函的概念。Schwarz[81]本质上采用了 Sobolev 的定义。以 D 表示具有紧致支撑的无穷次可微的函数空间，以 D′ 表示 D 的连续线性泛函的空间，他把 Delta 函数及其导数看成 D′ 的元素，取得了一定的成功。Schwarz 把广义函数的理论系统化，解决了 Delta 函数运算规律中的许多问题，得到一系列重要的结果，在 1950 年国际数学家大会上获得了 Fields 奖金。

Schwarz 的工作得到了大家的关心，今摘引一些代表性的评论如下。

H. Bohr 在介绍 Schwarz 的工作时引用了 F. Klein 的名言："在我们的科学中最大的进展往往是用新方法解决老问题。"并说："毫无疑问，Schwarz 的工作引起了全世界数学家的极大兴趣，和很多年轻数学家们

在 Schwarz 开辟的广阔领域中从事新的研究。”（见 H. Bohr 的1950年的演说[55]）

Bochner, S. 在[54]中对 Schwarz 的广义函数论作了评论，他罗列了 Schwarz 所得到的主要定理之后，指出 Schwarz 提出的概念和方法大都是前人有过的，例如光滑化技巧、单位分解以及 Weiner 和 Bochner 本人所发展的 Fourier 变换等。最后他说：“我们已经列举了所有的要点，无论在分析方面还是在概念方面这个工作有多少革新，现在还很难说。前面我们已经用这本书的特殊结果来评论它的价值，而对现在说到的这一方面的价值留待作者用各种方法产生出更多的结果来说明。” Bochner 和当时许多数学家一样不把函数概念的扩充认为是概念上的革新。他甚至对 I. Halperin 介绍 Schwarz 广义函数的小册子“广义函数论导引”也不肯放过，他写道：“我们对这本书的一点批评是：Halperin 太紧跟 Schwarz 了，他们过分主张用广义函数来说明 Delta 函数了。事实上，Dirac 函数早已被其它线性泛函的表示理论所说明，而且同样是合适的。”

我们再来看看 Schwarz 的自我评价：“我

们愿意表明广义函数论决不是一场'新的革命'。许多作者都已经发现并熟悉这个思想了，然而这个理论是简单的同时也是正确的。它概括了在许多不同领域里自发的经常用得不正确的方法，它是一个综合和简化，当然综合是全面的。"

这是举世公认的涉及微积分基础的大问题，引发了许多分析学的大师们的严肃、认真、仔细和热情的评论。

以 Schwarz 和 Sobolev 命名的广义函数论，在说明 Delta 函数时取得一定的成功，当触及到 Delta 函数的乘积时，立即陷入了困境。由于排除了无限大和无限小，难以表达 Delta 函数的个性，以致于难以处理广义函数的乘积。其实，这也是标准分析所遇到的困难。

在 Schwarz 得到 Fields 奖章之后十一年，Robinson 在[79]中建立了非标准分析，从此，无限大和无限小又在分析学中恢复了合法地位，微积分学的研究出现了新的格局。随之，对 Dirac Delta 函数的研究开始了新的篇章。Thurber, J. K. 和 Katz, J. 在1974的[93]，Lightstone, A. 和 Wang Kam 在

1975 写了[73]，李邦河在 1978 写了[80]，王进儒在 1980 写了[21]，Raju CK. 在 1982 写了[78]，作者除在 1979 写了[4]，1980 与石晟坚合写了[5]，并于 1984 年初步写成专著"两相微积分学"[8]，其中对 Delta 函数和微积分学基础进行了新的研究。

在 Robinson 发明非标准分析之后，从 1974 年 Thurber, J. K. 和 Katz, J. 开始研究 Delta 函数的分数幂，到 1984 年作者初步提出一个与物理学一致的 Delta 函数的系统理论，这的确是 Delta 函数理论的新的一章。

现在回到我们的历史导言。作为对 Robinson, Martin Davis 和 Reuben Hersh 的补充，更全面地看，关于微积分学基础的发展红线，应该是由墨翟，Democritus, Aristotle, Archimedes, Newton, Leibniz, Taylor, Lagrange, d'Alembert, Cauchy, Bolzano, Weierstrass, Dedekind, Heaviside, Dirac, Sobolev 和 Schwarz 而奔向 Robinson.

从以上关于历史的陈述中可以看出，Robinson 把研究的重点放在古典分析学上面，他对 Dirac 1947 年在[59]中的那一段话没有感受。Robinson 没有想到，在二十世纪上

半叶，在他之前十四年，由于物理学的内在需要，Dirac 不得不宣称他在研究“一些包含有某种无穷大的量”，并为此引进了Delta函数，实质上是一种最简单的非标准函数，在标准分析中看来，就是奇异函数了。Dirac的Delta函数，是一种不严谨的但很有用处的非标准分析。在十七世纪，物理学家Newton在1665—1666年间发明了微积分学，数学家Leibniz在1673—1676年间发明了微积分，他们是相互独立的，但Newton比Leibniz早七年。在我们的世纪中，物理学家Dirac在1926—1947年间发明了Delta函数并于1947年正式确认这是在研究无穷大量，数学家Robinson于1961年发明了非标准分析并同时引入了无穷大量，他们是相互独立的，但Dirac比Robinson早十四年。这是历史的巧合，引人发生无穷的回味。Robinson没有注意到：Delta函数与无穷大量之间的本质联系，因此没有把重点放在Delta函数的研究上。当我们懂得了这段历史之后，不能不感到：某种形式的非标准分析的理论会对Delta函数作出肯定的贡献。我们应当在Dirac与Robinson之间，在非标准分析与理论物理之间搭上一座

桥梁。我们不一定象 Schwarz 那样做，但可以吸收他的长处，也要吸收各个流派的古典的 Delta 函数理论的长处。如果现在还把 Delta 函数放在标准分析的框架之内，就真是削足适履了。

为了在非标准分析的基础上直接建立新的 Delta 函数的理论，把 Robinson 与 Dirac 连接起来，作者做了以下工作：〔4〕，〔6〕，〔7〕，〔8〕，和〔9〕，并与石最坚合写了〔5〕。论述的主体当然是 Delta 函数，同时对奇异积分引进了一点新的概念，因为 Delta 函数是最简单和最重要的奇异函数，只有对一般的奇异函数有新的认识，才能对 Delta 函数进行新的系统的研究。此外，我们还必须把基础加以扩大，因为 Robinson 侧重在以无限小为基础来重建古典分析，所以他把实数系 **R** 扩大为超实数系 $^*\mathbf{R}$ 就够了。$^*\mathbf{R}$ 还是一个域，我们则必须把 $^*\mathbf{R}$ 继续用 Dedekind 分划扩大为实序宇宙 $\mathbf{U}_2$ 才能把问题的实质描述清楚。从数学上讲 $\mathbf{U}_2$ 已经不是一个域了，但它是一个完备有序集，所以命名为实序宇宙。

在本文中，作者把在 **R** 上建立的微积分叫做标准分析，或叫单相微积分；把在 **R** 和

$\mathbf{U}_2$ 上联合建立的微积分叫两相微积分。

现在把本文所使用的主要符号介绍如下：**N** 代表标准自然数系，规定它的元素从 1 开始；**Q** 代表标准有理数系，它是有序域；**R** 代表标准实数线，它是完备有序域；***N** 代表非标准自然数系，它含有无限大元素，是 **N** 的扩大；***Q** 代表非标准有理数系，它是 **Q** 的扩大，仍为有序域；***R** 代表超实数系，它是 **R** 的扩大，是有序域并具有内的完备性；$\mathbf{U}_2$ 代表第二相的实序宇宙，它是 ***Q** 的全体 Dedekind 分划所组成的集合，它是完备有序集，但不是一个域。

2

什么叫标准分析



微积分学已从标准分析发展到非标准分析，为了说明什么是非标准分析，应先说明什么是标准分析。要说明什么是标准分析，最重要的是明确什么是标准分析的出发点，即标准实数线 **R** 的公理系。

在十七世纪 Newton 和 Leibniz 的时代，微积分只是一种描述性的科学，到十九世纪，通过 Cauchy，Weierstrass 和 Dedekind 等人的相继努力，终于把零散的材料组织起来，形成了实数线的公理系。全部标准分析的理论就建在这些公理之上，美国数学家 Steen 对这个公理系作了恰当的介绍，请参考[86]。现在

把这个公理系介绍如下。

我们以**R**表示实数线，**R**是个集合，它的元素叫实数，满足以下两组公理。

公理（2，1） **R**是有序域，即**R**有以下10条性质：

1．存在加法和乘法：若 x 和 y 是实数，则

$x+y$ 和 xy 亦是；

2．结合律：若 w，x 和 y 是实数，则

$$(w+x)+y=w+(x+y)$$

$$(wx)y=w(xy)；$$

3．交换律：若 x 和 y 是实数，则

$$x+y=y+x$$

$$xy=yx；$$

4．分配律：若 w，x 和 y 是实数，则

$$w(x+y)=wx+wy；$$

5．存在单位：即存在两个实常数0（加法单位）和1（乘法单位），使得对任意一个实数 x，成立

$$x+0=x$$

$$x1=x；$$

6．存在加法逆：若 x 是实数，则存在实数（$-x$）使得

$$x+(-x)=0,$$

称 $(-x)$ 为 x 的加法逆；

7．存在乘法逆：若实数 $x\neq 0$，则存在实数 x^{-1} 使得

$$xx^{-1}=1,$$

称 x^{-1} 为 x 的乘法逆；

8．成立三择一性：若 x 和 y 是实数，则

$$x<y,\ x=y,\ y<x$$

三者成立且仅成立一个；

9．成立传递性：若实数 $w<x$ 和 $x<y$，则

$$w<y;$$

10．成立保序性：对 **R** 的元素 若 $x<y$，则

$x+w<y+w$；若 $x<y$ 和 $0<w$，则

$$xw<yw$$

以上十组性质称之为有序域的公理。

此外，**R** 还满足

公理（2，2） **R** 是完备的。即是，设 E 是实数的非空集合，如果 E 有上界（即存在实数 x 使得不等式 $y<x$ 对 E 的所有的数成立），则 E 具有最小上界（即存在 E 的一个上界 x_0，它小于或等于 E 的其他任何一个上界）。

总起来说，实数线**R**是一个完备的有序域。

三百年来，微积分学，特别是标准分析取得了辉煌的成就，其基础就是实数线。在[86]中Steen把实数线公理系称之为“数学之帝座”，这不是没有道理的。

这样看来，标准分析最后是由Chauchy，Weierstrass和Dedekind等人确立的，建立在实数线**R**之上的，以极限论为主要方法和以研究函数及其微分和积分运算为主要对象的一门数学分支。

3

无限小悖论推动微积分学的发展，最后导致数理逻辑直接进入微积分学

从墨翟，Democritus 和 Aristotle 的论述可以明显看出，约在二千五百年前，人类就感到无限大和无限小的存在了。在[80]的最后，Robinson 写道：“无论如何，在分析学的非标准模型中，无穷小和无穷大数的真实性，不多也不少于标准无理数的真实性，理由是：如果用公理来引进这些数，这显然是对的；如果用发生学的方法来引进，标准无理数和非标准数一样，需要经过某种无穷的手续。此外，即使从实验科学家的观点来看，我们的话也有道理，因为任何测量只用整数和有理数，如果理论的框架超出这两种数之外，那就没有理由要

求我们一定停留在 Archimedes 数系之内。”

其实，无限大或无限小的引进，最简洁的方法还是公理化的方法。因此，我们引入以下公理。

公理(3,1) 假设存在一个非 Archimedean 域 $^*\mathbf{R}$，它是 $\mathbf{R}$ 的扩大。更确切地说，设存在一个有序域 $^*\mathbf{R}$（即它满足公理（2,1）的10条性质），并满足以下两条：

1. $\mathbf{R}$ 可以嵌入 $^*\mathbf{R}$ 成为一个有序子域，即 $^*\mathbf{R}$ 存在一个有序子域 $\mathbf{R}_1$，它与 $\mathbf{R}$ 代数同构。我们称 $\mathbf{R}_1$ 的数为 $^*\mathbf{R}$ 的标准数。在同构的意义下，$\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}_1$ 是等同的；

2. $^*\mathbf{R}$ 中存在无限小量，即 $^*\mathbf{R}$ 中存在某正数 ε，它小于 $\mathbf{R}$ 的每一正数。

由此不难推得：$^*\mathbf{R}$ 中存在无限大量。实际上若 ε 是 $^*\mathbf{R}$ 的正无限小，则 $1/\varepsilon$ 是无限大，它比 $\mathbf{R}$ 的任何一个正数都大。

从墨翟到 Leibniz，很多学者都感到无限小和无限大的存在，人们早就可以写下象公理（3,1）这样的公理了。但当微积分学发展到一定阶段，有关实数性质的零散材料逐步形成了完备有序域的公理系，人们终于认识到：实数线的完备性，对于建立严谨的微积分理论是

不可缺少的。

其实，我们也可以认为*R 是在 R 中加上正无限小 ε 之后按有序域的公理进行扩大而得到的。如果想在包含有无限小的数系*R 上建立微积分，也应当承认*R 是完备的。但这样就引发了著名的无限小悖论。

现在将无限小悖论陈述如下：如果在公理（3,1）之外还设*R 是完备的，即设*R 满足公理（2,2），则会得到悖论。今论证如下。

我们已知*R 中有一个正无限小 ε，它小于 R 的每一个正数。现在设 m 是任意有限的自然数，即 m 是 N 的任意元素，则乘积 mε仍然是无限小。以 P 代表所有乘积 mε 的集合，则 P 的每个元素都是无限小。于是 P有上界，其实每个 R 的正数都是 P 的上界。但 P 没有最小上界。若不然，设在*R 中存在一个元素 b，它是 P 的最小上界，由于*R 是有序域，则推得 b－ε 仍是 P 的上界和 b－ε<b，这就产生了矛盾。

这就是无限小悖论。

这使 Leibniz 感到很苦恼。作为哲学家的 Leibniz 报怨作为数学家的 Leibniz 怎么会捏构出一个自相矛盾的无限小来。他感到进退维

谷。

无限小悖论对微积分学的发展给了巨大的推动。为了解开无限小悖论，显然有两条道路。一条是完全排除无限小而承认完备性是普遍公理，从而建立了实数线 **R** 的公理系，在其上用极限的方法建立严格的微积分。这就是 Cauchy Weierstrass 和 Dedekind 所走的道路，几乎经历了一个世纪，形成了渊博的标准分析体系。这是无限小悖论对微积分学发展的第一次大推动。另一条是承认实在无限小而废除完备性作为普遍公理，为 ***R** 的存在取得合法地位。这需要较多的逻辑知识，在十九世纪是不能完成的。但这种努力从十七世纪 Leibniz 到二十世纪 Dirac 始终没有中断，最后是由美国逻辑学家 Robinson 完成的。他用模型论（数理逻辑的一支）的方法严格论证了起源于 Leibniz 的转移原则，为在 ***R** 上建立微积分奠定了逻辑基础，使无限小合法化，从而建立了非标准分析。这是无限小悖论对微积分学发展的第二次大推动并导致数理逻辑直接进入微积分。因为没有数理逻辑，既不能严格陈述，更不能正确使用转移原则，在 ***R** 上建立微积分只是一个泡影。

在微积分学中直接使用数理逻辑，这是一个进步，是不可逆转的历史性发展，我们应当正视这个现实。数理逻辑是一门伟大的学科。象任何一门伟大的学科一样，由通俗性和渊博性两方面组成的。因为通俗性反映真理的普遍性，渊博性反映真理的深刻性，二者是相辅相成的。

随着时代的前进，我们应当学习一点通俗的数理逻辑。因为没有它，就不能严格地全面地表达非标准分析的内容，本文也就写不下去了。另一方面，这里只讨论微积分学，涉及的只是数理逻辑的一点应用，我们当然不会喧宾夺主，过多地涉及逻辑学。我们应当使逻辑的深刻性寓于通俗性之中。

以下将从三方面通俗地介绍一点逻辑常识。

一、本文采用的逻辑语言

三个基本的逻辑连词：$\wedge$，$\vee$和$\neg$，其名称和功能如下：

$\wedge$，称之为“与”或“合取”。若A和B是两个命题，则$A\wedge B$表示A和B同时成立；

$\vee$，称之为“或”或“析取”。若A和B是两个命题，则$A \vee B$表示A和B中有一个成立；

$\neg$，称之为“非”。若A是一个命题，则$\neg A$表示A不成立。

为了把一个复合命题的结合层次表示清楚，我们采用方括号。例如，复合命题“$\neg A$与B有一个成立”可表示为$[\neg A] \vee B$。又例如，复合命题“或者是A与B同时成立，或者是C成立”可表示为“$[A \wedge B] \vee C$”。

两个复合逻辑连词：$\longrightarrow$和$\longleftrightarrow$，其名称和定义如下：

$\longrightarrow$，称之为“蕴含”。若A和B是两个命题，规定$A \rightarrow B$代表$[\neg A] \vee B$；

$\longleftrightarrow$，称之为“等价”。若A和B是两个命题，规定$A \longleftrightarrow B$代表$[A \rightarrow B] \wedge [B \rightarrow A]$。

为了省略方括号，我们规定，逻辑连词之间的结合能力由弱到强分为三个等级：1. $\rightarrow$，$\longleftrightarrow$；2. $\wedge$，$\vee$；3. $\neg$。例如，$[\neg A] \vee B$可简写成$\neg A \vee B$。又例如$[A \wedge B] \rightarrow C$可简写成$A \wedge B \rightarrow C$。

逻辑学中的推理规则是三段论，它规定：由命题A和$A \rightarrow B$可得到B。

为了方便，以T代表“真”，以f代表“假”。众所周知，命题$\neg A$与A必成立一个，记作$\neg A \vee A$，或记作$\neg A \vee A \longleftrightarrow T$；又A与$\neg A$不能同时成立，记作$\neg[\neg A \wedge A]$，或$\neg[\neg A \wedge A] \longleftrightarrow f$。

以X，Y和Z代表三个命题，我们还指出以下命题演算公式

(3,2) $X \vee X \rightarrow X$

(3,3) $X \rightarrow X \vee Y$

(3,4) $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$

(3,5) $[X \rightarrow Y] \rightarrow [Z \vee X \rightarrow Z \vee Y]$

(3,6) $X \rightarrow [Y \rightarrow X]$

(3,7) $[X \rightarrow [Y \leftarrow Z]] \rightarrow [[X \rightarrow Y] \rightarrow [X \rightarrow Z]]$

(3,8) $\neg[X \wedge Y] \longleftrightarrow \neg X \vee \neg Y$

(3,9) $\neg[X \vee Y] \longleftrightarrow \neg X \wedge \neg Y$

(3,10) $[X \rightarrow [Y \rightarrow Z]] \longleftrightarrow [X \wedge Y \rightarrow Z]$

(3,11) $[X \rightarrow Z] \rightarrow [X \wedge Y \rightarrow Z]$

(3,12) $[X \rightarrow Y] \rightarrow [[X \wedge Y \rightarrow Z] \longleftrightarrow [X \rightarrow Z]]$

(3,13) $[X \rightarrow Y] \wedge [Y \rightarrow Z] \rightarrow [X \rightarrow Z]$。

以上公式，读者仔细思索一下可以明白，或参考〔10〕,〔22〕或〔57〕等资料可以明白。

两个逻辑量词：（∃）和（∀），其名称和功能如下：

（∃）：称之为存在量词，若 A(x) 表示依赖于变量 x 的关系，则 (∃x) A(x) 表示：存在 x 使得关系 A(x)成立；

（∀）：称之为全称量词，(∀x)A(x) 表示：对全体 x 而言关系 A(x)都成立。

若 A(x)和 F(x)是依赖于变量 x 的关系，对量词演算有以下简单公式

(3,14) $(\exists x)A(x) \longleftrightarrow \neg(\forall x)\neg A(x)$

(3,15) $(\exists x)\neg A(x) \longleftrightarrow \neg(\forall x)A(x)$

(3,16) $\neg(\exists x)A(x) \longleftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$

(3,17) $\neg(\exists x)\neg A(x) \longleftrightarrow (\forall x)A(x)$

(3,18) $(\forall x)F(x) \to F(b)$，b 是任意常量

(3,19) $F(b) \to (\exists x)F(x)$，b 是某个常量

(3,20) $(\forall x)[X \vee F(x)] \longleftrightarrow X \vee (\forall x)F(x)$

(3,21) $(\forall x)[X \wedge F(x)] \longleftrightarrow X \wedge (\forall x)F(x)$

(3,22) $(\exists x)[X \wedge F(x)] \longleftrightarrow X \wedge (\exists x)F(x)$

(3,23) $(\exists x)[X \vee F(x)] \longleftrightarrow X \vee (\exists x)F(x)$

(3,24) $(\forall x)[X \to F(x)] \longleftrightarrow [X \to (\forall x)F(x)]$

(3,25) $(\exists x)[X \to F(x)] \longleftrightarrow [X \to (\exists x)F(x)]$

(3,26) $[(\forall x)F(x)\to X]\longleftrightarrow(\exists x)[F(x)\to X]$

(3,27) $[(\exists x)F(x)\to X]\longleftrightarrow(\forall x)[F(x)\to X]$

其中X不依赖于x。以上这几个公式，读者可参考[10],[22]或[57]，或者稍加思索即可明白。

二、本文采用Russel的简单类型论

为了避免集合论中的悖论，Russel提出了类型论，今将其简单的介绍如下。

我们在标准分析中所碰到的对象是实数以及和实数有关的各种关系，如果加以仔细考虑，就会发现它们具有不同的类型。

我们规定：单个实数的类型是0，实数集合的类型是（0）；二维实平面的点集的类型是（0：0），n维实欧氏空间的点集的类型是（0：0…0），共n个0。

一元函数，如y＝sin x，是平面上的点集，它的类型是（0：0）；类似，二元函数的类型是（0：0：0）。又如积分关系

(3,28) $$I=\int_a^b f(x)dx$$

其中I，a和b是0型，f(x)是(0∶0)，所以(3,28)是(0∶0∶0∶(0∶0))型。

类型的一般定义如下：

1. 0是一个型；

2. 若τ_1，τ_2，…，τ_n是型，则(τ_1∶τ_2∶…∶τ_n)也是型，其中n是正整数；

3. 当n≥2，若τ_1，τ_2，…τ_n是型，则τ_1∶τ_2∶…∶τ_n也是型，并把这种不带圆括号的型称为向量型。

我们以φ表示空集。空集是有类型。平面上空集可记为$\phi_{(0:0)}$。τ型空集可记为ϕ_τ。类似等号"="也是有类型的。为了避免悖论，本文规定每个变量只能在同一型的对象中取值。

三、本文采用的集合论符号有：∈，⊂，∩，∪，和～，它们的功能如下

若a是某元素，A和B是集合，则a∈A表示a是A的元素，A⊂B表示A是B的子集，A∩B表示A和B的交集，A∪B表示A

和B的并集，$A\setminus B$表示A的所有不属于B的元素所组成的集合。

由单个元素x所组成的集合以$\{x\}$表示。由满足关系p的x所组成的集合记为$\{x|p\}$。

为省略方括号，本文中的主要数学符号，按结合能力，由弱到强，分为七个等级

1. $\rightarrow$，$\longleftrightarrow$；2. $\wedge$，$\vee$；3. $\neg$；

4. $\in$，$\subset$，$<$，$=$；5. $\cap$，$\cup$，$\setminus$；

6. $+$，$-$；7. $\div$ (/)，$\cdot$（乘号，可省略）；

在同一级中，结合能力相等。

变量x是s型的记为$x\tilde{T}s$。例如有序域公理（2，1）的第一条可写为

(3,29)　$(\forall x\tilde{T}o)(\forall y\tilde{T}o)[x+y\in \mathbf{R}\wedge xy \in \mathbf{R}]$,

而完备性公理（2，2）可写作

(3,30)　$(\forall x\tilde{T}(o))$[x非空有上界$\rightarrow$x有最小上界]。

4

转移原则的确立导致非标准分析的诞生



我们知道，数学是一门很古老的科学．数学史几乎和人类的文明史一样长。人类对于数的认识是逐步发展的，而且有两个发展方向：一个是向深度发展，从自然数、正分数、有理数到实数，到 Robinson 的超实数系$^*\mathbf{R}$；另一个是向广度发展，从一元数、复数、四元数、向量、矩阵、李群、微分几何到泛函分析等。

Robinson 的贡献在于，最后是通过他完成了从实数到超实数的认识上的飞跃。超实数系与实数系之间的明显差别是：超实数系中含有实数系中没有的无限大和无限小。不论在中国还是在欧洲，对无限的感受已有两千多年

了，即超实数系已在人类思想史中孕育了两千多年。到了 Newton 和 Leibniz 时代，无限大和无限小已活跃于纸上，呼之欲出，但毕竟没有出来。Leibniz 进退维谷，最后不得不说：无限小是有用的虚构。Berkeley 则说：无限小是数量死亡后所变的鬼。不管是"虚构"也好，"鬼"也好，都说明一个铁的事实，即超实数系还没有正式降临到人间。更有甚者，到十九世纪，无限小似乎一劳永逸地被Weierstrass 赶出了微积分，就人类对超实数系的认识而言，似乎是黎明前的黑暗。

超实数系的概念为什么这么难产呢？主要是受到逻辑水平的限制，怎么样在承认无限小的前提下避开无限小悖论，长时期想不出办法。本世纪，由于 Hilbert 等人的倡导，数理逻辑有很大的发展，形成了证明论、公理集合论、递归论和模型论等重大分支。在模型论的基础上，Abrahan Robinson 于 1961 年严格论证了起源于 Leibniz 的转移原则，在包含无限小的数系*R 上，排除了悖论，建立了严谨的微积分理论——非标准分析，这的确是一个很大的成功。更重要的是，在人类思想史上孕育了两千多年的包含无限大和无限小的数系，经

Robinson的接生，热热闹闹地降临到人间。

起源于Leibniz的转移原则，是人类思维的一条基本原则，是非标准分析的核心。承认这条原则是一个很大的进步。

为了说清转移原则的实质，我们作以下解释，数学是人类思维的一部分，从全局看局部，常常会使问题明朗。因此从人类的日常思维谈起。比如人们根据天津地区之内的事物所形成的概念和判断构成一个理论体系，以T记之。当地区由天津扩大到全中国时，事物增多了，凭人类的长期实践知道：基于天津的事物所形成的理论T，会以某种方式继续存在以外，还会增加一些新的概念和判断，形成扩大的理论，以T_2记之。

现在研究一下当地域扩大时概念的变化。如果在T中谈到狗（狗是个概念），它所指的无非是天津地区所有的狗。如果把地域扩大到全中国，在T_2中研究问题，狗的概念仍然有，但它所指范围已经扩大，除了天津的狗，还有北京的狗，西藏的狗，等等。为了明确，把天津的狗看成是标准的，则中国的狗可记为*狗，表示概念已经扩大。

但大地域中有的概念小地域可能没有。如

中国有黑龙江，天津则没有。所以对T而言，黑龙江是外部概念。这样，T_2 的概念可分为两部分，一部分由T扩大而来，称为内的，如*狗、*猫等；其余的则是外的，如黑龙江，长白山等。

下面分析一下判断（句子）在T中成立一个显然的判断S：山的海拔小于4000米。在 T_2 中，S显然不成立了，因为珠穆朗玛的高度超过了4000米。对判断S怎么处理呢？一种办法是把目光限制在天津地区内，闭关自守，于是S成为一条公理。另一种办法是放眼全中国，这时只能说，S只对一部分的中国的山成立，或者说，S在中国是有条件地成立，在 T_2 中我们把这个有条件地成立的判断记为*S，它是S在 T_2 中的扩大。要把*S在 T_2 中成立的条件说出来是很复杂的。但从原则上讲，T_2 的判断也分成两部分，一部分由T的扩大得到，称之为内的，如*S；其余的则称之为外的，如“珠穆朗玛高于4000米”，等等。

总之，T_2 可以分为两部分，一部分由T的概念和判断扩大而来，称之为内的，记为*T，其余的则称为外的，自然以 $T_2\setminus{}^*T$ 表示。这样的普通常识，对数学也是有用的。

我们现在转向讨论微积分学本身。

以M表示 R上的全部理论，即标准分析，以Γ表示 M 中各型常量（固定对象）的集合。由公理（3，1）知*R 是 R 的扩大。以M_2表示*R 上的全部理论，以Γ_2表示M_2中各型常量的集合，又以*M 表示M_2中内的理论，即由 M扩大而来的那部分理论。

上节已经指出，完备性与无限小的存在是相矛盾的（或叫不协调的）。历史上由于这个矛盾竟把无限小逐出了微积分学。保存完备性而排斥无限小，这就保住了理论的协调性（即无矛盾性）。Cauchy 和 Weierstrass 采取的就是这个方法，他们把目光限制在 R 之内，闭关自守，于是完备性成为公理，从而建立了严谨的标准分析。保住理论协调性的另一条道路是承认无限小而不把完备性作为普遍公理。承认无限小并不难，二千多年前墨翟、Democritus 和 Archimedes 就已经办到了。困难在于由 R 扩大到*R 后如何限制完备性公理，因为*R 一般是不完备的。但并不是*R 的任何子集都不满足完备性公理的要求。例如*R 的闭区间[a，b]有上界，很容易看出它的最小上界就是 b 。这样，我们可以说：*R 的部分子集

满足完备性公理的要求。但要把这部分子集分离出来，在模型论诞生之前是不可能的，在模型论诞生之后仍然是很繁琐的。

但我们的真正的目的不只是要求一个完备性公理，而是要求在*R的部分对象上建立起全部微积分理论。此外，我们现在已经有Cauchy，Weierstrass和Dedekind等所建立的标准分析M，它可以作为我们工作的出发点。因此，与其在*R上先建立一个有条件的完备性定理，然后用推理方法逐步建立众所周知的分析理论，还不如直接了当地把M中的全部概念转移到*R的部分对象之上。Robinson完成了这项历史使命，他把M正确地转移到*R之上，形成了协调的内的理论*M，于是非标准分析就应运而生了。

在此，我们再明确一下，M中任何句子s，都是由R上的某型关系，在相应的位置上填入合适的常量或某型变量，再适当地对变量加上量词而构成的。例如（3,29）和（3,30）。又s的变量的取值范围就是R上同型常量的全体。

根据Robinson[80]的第二章的结果和张锦文[26]的介绍，我们引入以下公理。

公理（4，1）Leibniz-Robinson转移原则。标准分析 **M** 可以在Γ_2的部分对象上扩大成为微积分理论*M。如果以*Γ记*M中出现的各型常量的集合，则*Γ是Γ_2的子集。确切地说，成立以下性质：

1. 常量的转移原则。设*Γ存在一个子集合Γ_1，并存在一个由Γ到Γ_1的转移双射*，它保持**R**与$\mathbf{R}_1$之间的同构，把（0）型常量**R**转移到*R；Γ的每个常量a，转移到$^*a\in\Gamma_1$，而且类型相同；Γ_1的对象在*Γ中称之为标准的，*Γ的其他对象则是非标准的；*Γ的对象在Γ_2称之为内的，Γ_2的其他对象则是外的；在同构意义下，Γ等价于Γ_1；作为常量符号，**M**转移到*M和Γ转移到*Γ；

2. 含变量关系的转移原则。若$A(x_1,\cdots,x_i,a_1,\cdots,a_j)$是**M**的一个关系，其中$x_1,\cdots,x_i$是变量，$a_1,\cdots,a_j$是常量，$1\leqslant i+j$，i和j是非负整数，则他转移到*M的关系$^*A(x_1,\cdots,x_i,{}^*a_1,\cdots,{}^*a_j)$，注意，前者变量的变域在Γ中，后者在*Γ中。

若$B(x_1,\cdots,x_i,b_1,\cdots,b_j)$是*M的关系，其中$x_1,\cdots,x_i$是变量，$b_1,\cdots,b_j$是常量，$1\leqslant i+j$，i和j是非负整数，则在Γ中存在常量A

使得$^*A=B$，或A转移到B。或者更明确一点，$^*A(x_1,\cdots,x_i,y_1,\cdots,y_j)=B(x_1,\cdots x_i,y_1,\cdots,y_j)$，而且存在常量$a_1,\cdots,a_j\in\Gamma$使得$A(x_1,\cdots,x_i,a_1,\cdots,a_j)$是**M**的关系，在上式中$y_1,\cdots,y_j$是变量，而且在关系式中每个位置上的类型是确定的；

3. 由**M**到***M**句子的转移。设s是**M**的一个句子，通过双射$*$将s的每一个常量，如a，都转移为$^*a$，又将s的每一个变量的变域由Γ扩大为$^*\Gamma$中同型的全体常量，那么s就变成***M**的一个句子；

4. 由***M**到**M**句子的转移。设p是***M**的一个句子，如果其中的全体常量$b_1,\cdots,b_j$是标准的，只要将p中每个变量的变域由$^*\Gamma$限制到Γ_1中同型的全体常量，则p成为**M**的句子。如果p的部分常量$b_1,\cdots,b_i,i\leqslant j$，是非标准的，则一定存在标准的$a_1,\cdots,a_i$，它们的型依次与$b_1,\cdots,b_i$相同，以$a_1,\cdots,a_i$依次取代$b_1,\cdots,b_i$在p的位置，并将每个变量的变域由$^*\Gamma$限制到$\Gamma_1$中同型的全体常量，所得到的即是**M**的句子。

这就是著名的转移原则，是人类思维的一条普遍原则，对数学和物理等理论学科都是成

立的。转移原则是非标准分析的核心，任何形式的非标准分析都与一定的转移原则不可分割，这里所陈述的转移原则是普遍的。

设A是Γ中的常量，A转移到*A∈*Γ。如果A不是O型的，则A与*A的意义不完全相同。例如*R中有无限大，而R则没有。

又如自然数集N转移到*N，但*N中有无限大，而N则没有。

在Robinson的模型中（见[30]），若内集合S是无限的，则S含有非标准的内元素。这是否所有非标准模型的共同性质呢？在[29]中张锦文用力迫法对此做出否定的回答。

这样，我们需同时研究三个理论M，*M和M_2。我们确定一些方便的称呼：称标准分析M为第一相的微积分，称M_2为第二相的微积分，*M为第二相的内的微积分，M_2╲*M则是外的，R为第一相实数线，*R为第二相实数线，等等。两相微积分研究的是M，*M和M_2以及他们之间的关系。

5

理论分为内外两部分 这是非标准分析 的基本特征

数学工作总是继往开来的，在非标准分析的研究中，Leibniz-Robinson 的转移原则很好地解决了“继往”的问题，把标准分析 $\mathbf{M}$ 全部转移到 $\mathbf{M}_2$ 成了 $^*\mathbf{M}$。下一个重要的问题是“开来”，即要阐明：在 $\mathbf{M}_2 \setminus {}^*\mathbf{M}$ 中有些什么令人感兴趣的东西。

有比较，才能鉴别，有鉴别才能发展。为了区分 $\mathbf{M}$ 和 $^*\mathbf{M}$，我们用转移双射 $*$ 从符号上加以区别。如 $\mathbf{\Gamma}$ 的常量 A，在 $^*\mathbf{\Gamma}$ 中为 $^*\mathbf{A}$，等等。为了区分 $^*\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{M}_2$，我们采用以下三个简单的内原则

(5,1)　1. 若 $A(a_1,\cdots,a_j)$ 是 $\mathbf{M}_2$ 的一个关

系式，$j\in \mathbf{N}$，则：

在$^*\mathbf{M}$中$A(a_1,\cdots,a_j)$成立$\longleftrightarrow$在$\mathbf{M}_2$成立 $A\in {}^*\mathbf{\Gamma}\wedge a_1\in {}^*\mathbf{\Gamma}\wedge \cdots\wedge a_j\in {}^*\mathbf{\Gamma}\wedge (a_1,\cdots,a_j)$；

2. 若$A(x)$是$\mathbf{M}_2$的一个关系，则在$^*\mathbf{M}$成立$(\forall x)A(x)\longleftrightarrow$在$\mathbf{M}_2$成立

$$A\in {}^*\mathbf{\Gamma}\wedge(\forall x)[x\in {}^*\mathbf{\Gamma}\to A(x)];$$

3. 若$A(x)$是$\mathbf{M}_2$的一个关系，则在$^*\mathbf{M}$成立$(\exists x)A(x)\longleftrightarrow$在$\mathbf{M}_2$成立$A\in {}^*\mathbf{\Gamma}\wedge(\exists x)[x\in {}^*\mathbf{\Gamma}\wedge A(x)]$.

为了方便，对于定义域为p，值域为q的函数φ，在$\mathbf{M}$中记为$\varphi\in \mathrm{ft}(p,q)$，在$^*\mathbf{M}$中记为$\varphi\in {}^*\mathrm{ft}(p,q)$和在$\mathbf{M}_2$中记为$\varphi\in \mathrm{ft}_2(p,q)$。由（5，1）可以推得

$$(5,2)\qquad \varphi\in {}^*\mathrm{ft}(p,q)\longleftrightarrow\varphi\in {}^*\mathbf{\Gamma}\wedge p\in {}^*\mathbf{\Gamma}\wedge q\in {}^*\mathbf{\Gamma}\wedge\varphi\in \mathrm{ft}_2(p,q)$$

在标准分析$\mathbf{M}$中的常用符号，如Σ, lim, d/dx和$\int dx$转移到$^*\mathbf{M}$中自然是$^*\Sigma$，$^*\lim$，$^*d/dx$和$^*\int dx$，这在[8]中有详细的解释。

有时为了清楚表明$^*\mathbf{N}$，$^*\mathbf{Q}$和$^*\mathbf{R}$是第二

相的，我们记作：$^*N=N_2$，$^*Q=Q_2$ 和 $^*R=R_2$。

在标准分析 M 中，可以用有理数区间套定义实数，具体作法如下

(5,3) $r\in R\longleftrightarrow(\exists p)(\exists q)[p\in ft(N,Q)$ 是增加的 $\wedge q\in ft(N,Q)$ 是减少的 $\wedge\lim_{n\to\infty}\{q(n)-p(n)\}=0$ $\wedge r=\bigcap_{i\in i}(p(n),q(n)]$

通过公理（4,1）将（5,3）转移到 $^*M$ 得

(5,4) $r\in{}^*R\longleftrightarrow(\exists p)(\exists q)[p\in{}^*ft({}^*N,{}^*Q)$ 是增加的 $\wedge q\in{}^*ft({}^*N,{}^*Q)$ 是减少的 $\wedge{}^*\lim_{n\to{}^*\infty}\{q(n)-p(n)\}=O\wedge r=\bigcap_{i\in{}^*N}(p(n),q(n)]$

在 M_2 中通过有理数区间套，一般只能定义

(5,5) $r\in A_2\longleftrightarrow(\exists p)(\exists q)[p\in ft_2(N_2,Q_2)$ 是增加的 $\wedge q\in ft_2(N_2,Q_2)$ 是减少的 $\wedge(Q_2\lim_{i\to{}^*\infty}\{q(n)-p(n)\}=O\wedge r\bigcap_{n\in N_2}(p(n),q(n))]$，

称 A_2 为第二相实在数（Actual number）集，A_2 是个有序域，$^*R\subset A_2$，但不能断定 $^*R=A_2$，

在（5,5）中因 $\mathbf{Q}_2$ 是有序域，故可直接定义极限 $\mathbf{Q}_2\lim$。在（5,4）与（5,5）之间有以下等价关系

(5,6) $\quad r\in{}^*\mathbf{R}\longleftrightarrow r\in A_2\wedge p\in{}^*\Gamma\wedge q\in{}^*\Gamma$

为了区分清楚内和外，要对一些常见外集合有所了解。例如，在 $\mathbf{M}$ 中

(5,7) $\quad \mathrm{O}=\bigcap_{n\in N}\left(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right),$

转移到 ${}^*\mathbf{M}$ 得

(5,8) $\quad {}^*\mathrm{O}=\bigcap_{n\in{}^*N}\left(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)$

在 $\mathbf{M}_2$ 中我们定义

(5,9) $\quad \mathrm{mon}({}^*\mathrm{O})=\bigcap_{i\in N}\left(-\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)$

称之为零单子。

${}^*\mathbf{R}$ 上的一些对象之所以是外的，其原因是因为 ${}^*\mathbf{R}$ 中有无限小和无限大，为了快速认别某些外的集合，我们必须再系统地说明一下有限与无限的概念。设 $x\in{}^*\mathbf{R}$，我们定义

(5,10) $\quad x$ 是无限小 $\longleftrightarrow x\in\mathrm{mon}({}^*\mathrm{O})$，

(5,11) $\quad x$ 是有限的 $\longleftrightarrow(\exists y)[y\in\mathbf{R}_1\wedge|x|<|y|]$，

(5,12) $\quad x$ 是无限大 $\longleftrightarrow(\forall y)[y\in\mathbf{R}_1\longrightarrow|y|<|x|]$。

由此可知，$^*\mathbf{R}$ 的下述子集是外的：全体无限小的集合 mon($^*O$)、全体无限大的集合和全体有限数的集合。

一般地我们可以引入以下两个定义：

(5.13)　若 $x, b \in {}^*\mathbf{R}$ 且 $b > {}^*O$，称 y 属于以 x 为中心和以 b 为单位的星系，记作 $y \in \mathrm{gal}(x, b)$，如果存在 $n \in \mathbf{N}$ 使得 $|y-x| < nb$；

(5,14)　称 y 属于以 x 为中心和以 b 为单位的原子，记作 $y \in \mathrm{atom}(x, b)$，如果对任何 $n \in \mathbf{N}$，成立 $|y-x| < b/n$。

显然，原子和星系都是外的集合。按 Robinson 的记号，若 $x \in \mathbf{R}$ 和 $y \in \mathrm{atom}(x, 1)$，则称 x 是 y 的标准部分，记作 $x = \mathrm{st}(y)$。

6

极限与无限小的等价性



我们知道，由 Cauchy，Weierstrass 和 Dedekind 建立起的标准分析，其基础是建立在极限概念之上的。Robinson 发现：在 $\mathbf{M}_2$ 中看来，这种极限过程等价于一种无限小说法，利用这种等价性可以把标准分析建立在无限小概念之上，这是一个重要的和根本性的结果。对此简要介绍如下。

(6,1)　Robinson 定理。若 $\varphi \in ft(b, \mathbf{R})$ 和 σ 是 b 是凝聚点，那么：$\lim\limits_{x \to \sigma} \varphi(x) = g \longleftrightarrow (\forall y)[y \in {}^*b \wedge y \neq {}^*\sigma \wedge |y - {}^*\sigma|$ 是无限小 $\longrightarrow |{}^*\varphi(y) - {}^*g|$ 是无限小]。

证明：必要性显然。下面只证充分性。设

对任 $\varepsilon\in\mathbf{R}$ 且>0，我们在$^*\mathbf{M}$ 有句子

(6,2)　$(\forall y)[y\in{}^*b\wedge y\neq{}^*\sigma\wedge|y-{}^*\sigma|$ 是无限小$\longrightarrow|^*\varphi(y)-{}^*g|$ 是无限小$]$，

由此推得在$^*\mathbf{M}$ 有以下句子

(6,3)　$(\forall y)[y\in{}^*b\wedge y\neq{}^*\sigma\wedge|y-{}^*\sigma|$ 是无限小$\longrightarrow|^*\varphi(y)-{}^*g|<\varepsilon]$，

由此和（3,19）推得在$^*\mathbf{M}$ 成立

(6,4)　$(\exists\delta)(\forall y)[y\in{}^*b\wedge y\neq{}^*\sigma\wedge|y-{}^*\sigma|<\delta\longrightarrow|^*\varphi(y)-{}^*g|<\varepsilon]$。

现在把$^*\mathbf{M}$ 的句子转移到 $\mathbf{M}$ 即证明了充分性。

在无限小的基础上重建标准分析的工作已经很多了，如 Robinson[79]和[80]以及 Keisler[70]等，作为 Leibniz 所留下的历史任务大体已经完成了。当前主要的任务是面向未来，不断开拓新的研究方向。

7

从超实数系 $^*R$ 扩大到实序宇宙 U_2



人们普遍认为：标准分析**M**的基础是实数线**R**，它是完备有序域。Robinson把**R**扩大为*R，它仍是一个有序域，但完备性已经不是公理了。Robinson在不完备的*R上建立起微积分，在数学界引起了巨大的震动。进一步，*R还可以扩大为实序宇宙$\mathbf{U}_2$（参看黄耶规[7][8][9]），$\mathbf{U}_2$虽然完备，但已经不是一个域了，在其上仍然可以建立微积分。微积分的基础可以不是一个域，这似乎违反普通的常识。其实不然，这正是微积分基础的自然发展。让我们仔细地考虑一下吧！其实标准分析的基础并不完全是实数线**R**，除**R**的元素外，

还有两个符号：$+\infty$和$-\infty$，它们在M中也是不可少的，例如

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty$$

更确切地说：标准分析的基础是$R\cup\{\pm\infty\}$。这是十分合乎人之常情的。显然，$\pm\infty$不能是有序域的成员，因为$+\infty+\infty=+\infty$。但是感觉到了的东西，人们不能立刻理解它。所以长时期人们对$\pm\infty$似乎是视而不见，对它们的数学意义不去深思。现在我们有条件把这一切系统化了。

我们现在引入Q_2的Dedekind分划，注意$^*Q=Q_2$。如果Q_2被分成三个子集l，m和u满足以下五个条件

1. $Q_2=l\cup m\cup u$；
2. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[x\in l\wedge y\in m\wedge z\in u\rightarrow x<y<z]$；
3. l是非空的且没有最大元素；
4. u是非空的且没有最小元素；
5. m只有一个元素或者是空集。

那么l，m和u构成一个Q_2分划，记作$(l|m|u)_2$，l是分划的下集合，m是中集合和u是上集合。全体Q_2分划的集合记为DQ_2，

不难看出：${}^*\mathbf{R}\subset\mathbf{A}_2\subset\mathbf{DQ}_2$。

关于$\mathbf{DQ}_2$，我们先讨论以下四点。

Ⅰ．$\mathbf{DQ}_2$的分划分成两类：第1类，中集合m是非空集；第2类，中集合m是空集。第1类分划与$\mathbf{Q}_2$同构。

Ⅱ．$\mathbf{DQ}_2$中可以如下定义序。若$t, w\in\mathbf{DQ}_2$，$t=(l(t)|m(t)|u(t))_2$和$w=(l(w)|m(w)|u(w))_2$，我们定义：

1．相等，$t=w$当且仅当$l(t)=l(w)$，

2．小于，$t<w$当且仅当$l(t)\subset l(w)\wedge l(t)\neq l(w)$。

不难看出，$\mathbf{DQ}_2$是完备有序集。

Ⅲ．$\mathbf{DQ}_2$中有以下四个特殊元素：$-\infty$，0_-，0_+和$+\infty$，其含义如下：

$-\infty=(\alpha|\phi|\beta)_2$，其中$\alpha$是$\mathbf{Q}_2$的负无限大元素的集合，$\beta=\mathbf{Q}_2\setminus\alpha$，$-\infty$是$\mathbf{DQ}_2$一个负的潜无限大。

$0_-=(\gamma|\phi|\theta)_2$，其中$\gamma$是$\mathbf{Q}_2$的非无限小的负数的集合，$\theta=\mathbf{Q}_2\setminus\gamma$，$0_-$是$\mathbf{DQ}_2$的一个负的潜无限小。

$0_+=(c|\phi|d)_2$，其中d是$\mathbf{Q}_2$的非无限小的正数的集合，$c=\mathbf{Q}_2\setminus d$，$0_+$是$\mathbf{DQ}_2$的一个正的潜无限小。

$+\infty=(a\,|\phi|\,b)_2$，其中 b 是 Q_2 的正无限大的元素的集合，$a=Q_2\setminus b$，$+\infty$ 是 DQ_2 的一个正的潜无限大。

Ⅳ．DQ_2 不是一个域。作为例子，我们讨论 $0_++0_+=?$ 。注意，$^*0<0_+$ 是 DQ_2 的不等式。由定义 $0_+=(c\,|\phi|\,d)_2$，现在我们定义

(7,1)　$q=\{z\,|z=x+y\wedge x\in c\wedge y\in c\}$

(7,2)　$r=\{z\,|z=x+y\wedge x\in d\wedge y\in d\}$。

不难看出 $q=c$ 和 $r=d$。于是在 DQ_2 只存在一个元素 0_+ 满足以下条件

(7.3)　$(\forall x)(\forall y)[x\in q\wedge y\in r\longrightarrow x<0_+<y]$。

这样我们只能定义

(7.4)　$0_++0_+=0_+$。

若 DQ_2 是个域，则成立

(7,5)　$0_++0_+=20_+$

由（7,4）和（7,5）得到

(7,6)　$20_+=0_+$

(7,7)　$2=1$，

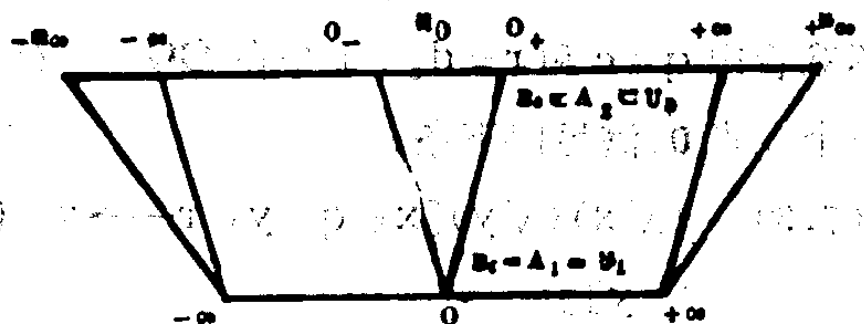
这是一个矛盾。于是 0_+ 不是域的成员，DQ_2 不是一个域。

因此我们把 DQ_2 叫做实序宇宙，以 U_2 简记之，它的元素叫实序，表示它是实数的推

广。这受到Jaffe[49]的启发，他认为："数学的作用是给宇宙排定序"。按我们的习惯则应说："数学研究的是宇宙中的序"。

数学研究有分析和直观两方面，下面对超实数线，实在数线和实序宇宙提出一个几何解释——两相图。

(7,8)　$R_2 \subset A_2 \subset U_2$



两　相　图

在两相图（7,8）中，下面的线代表实数线R，左端是－∞，右端是＋∞，原点是0。在两相图中A_1是有理数域Q的长度趋于0的区间套的集合。U_1是Q的Dedekind分划的集合，称A_1为第一相的实在数线（actual number line），称U_1为第一相实序宇宙，众所周知：$R_1 = A_1 = U_1$。

上面的线代表第二相实序宇宙U_2，其左端是$-{}^*\infty$，右端是$+{}^*\infty$，原点是^{*0}，其

中有四个潜在数 $-\infty$，0_-，0_+ 和 $+\infty$。实数线 $\mathbf{R}_1$ 的原点 0 在 $\mathbf{U}_2$ 中扩大为闭区间 $[0_-, 0_+]$，$\mathbf{R}_1$ 的左端 $-\infty$ 在 $\mathbf{U}_2$ 扩大为 $(-*\infty, -\infty]$，右端 $+\infty$ 扩大为 $[+\infty, +*\infty)$。我们已证得：$\mathbf{R}_2 \subset \mathbf{A}_2 \subset \mathbf{U}_2$。由于 $\mathbf{A}_2$ 是有序域，又 0_+ 不能是有序域的成员，所以 $\mathbf{A}_2$ 是 $\mathbf{U}_2$ 的真子集。但 $\mathbf{R}_2 \subsetneqq \mathbf{A}_2$，现在还没弄明白。

（7，8）是两相图，作者在[9]中还绘制了多相图，这里就不细说了。如果把 $\mathbf{R}_1$ 看成人类对自然界的序的第一张全息摄影，则 $\mathbf{U}_2$ 是一张更精密的全息摄影。有些问题，在 $\mathbf{R}_1$ 中具有奇异性，我们自然希望在 $\mathbf{U}_2$ 中得到表达和解决，这是作者引入两相微积分学的核心。

对于 $\mathbf{U}_2$ 的元素的分类命名，我们列出第62页的表格（7，9）

例如，空格 1 内应填入“无限小实序”，表示 $[0_-, 0_+] \cap \mathbf{U}_2$ 中的元素名称，空格 10 内应填入“潜在负无限大”，表示 $(-*\infty, -\infty] \cap [\mathbf{U}_2 \setminus \mathbf{A}_2]$ 中的元素名称，和空格 8 内应填入“有限实数”，表示 $(-\infty, +\infty) \cap \mathbf{R}_2$ 的元素名称，等等。

Democritus 在公元前五世纪引入了实在

(7,9)

∩	U_2 实 序	$U_2 \setminus A_2$ 潜在数	A_2 实在数	R_2 实 数
$[0_-, 0_+]$ 无限小	1	2	3	4
$(-\infty, +\infty)$ 有 限	5	6	7	8
$(-{}^*\infty, -\infty)$ 负无限大	9	10	11	12
$(+\infty, +{}^*\infty)$ 正无限大	13	14	15	16

第二相数名表

无限小，Aristotle在公元前四世纪引入了潜在无限小，这些开始似乎是虚无飘渺的哲学思想，经过人们两千多年的研究，越来越变得具体。现在我们可以在（7,9）表中把它们确切地表现出来，这是多么微妙的巧合和深刻的历史发展。

为了对U_2的每个潜在数以更加清晰地表示，我们作以下讨论。若$^*N = N_2$分为两个非空子集p和s

1. $N_2 = p \cup s$,

2. $(\forall x)(\forall y)[x \in p \wedge y \in s \longrightarrow x < y]$.

则p和s构成一个N_2分划，记为$N_2(p|s)$，p称之为分划的下集合，s为上集合。所有N_2分

划的全体记为DN_2，称之为自然序集，其元素叫作自然序。

DN_2的元素分为两大类：

第一类。下集合有最大元素，同时上集合有最小元素；

第二类。下集合无最大元素，同时上集合无最小元素。

第一类N_2分划与N_2同构。用$DN_2 \setminus N_2$表示第二类分划的集合。

对DN_2的元素的分类命名，我们列出以下表格

(7,10)

$\cap$	DN_2 自然序	$DN_2 \setminus N_2$ 潜在自然数	N_2 自然数
$[1, +\infty)$ 有限	1	2 (空集)	3
$[+\infty, +{}^*\infty)$ 无限大	4	5	6

DN_2元素名

例如，空格1应填入"有限自然序"，代表$(1, +\infty) \cap DN_2$的元素的名称，空格5应填入"无限大潜在自然数"等等。

由于在$\mathbf{M}$有二进有理数，转移到${}^*\mathbf{M}$有*[二进有理数]。在U_2，对每个$\xi \in [{}^*O, a)$，

$a\in \mathbf{N}_2$，我们有以下两种情况：或者成立

(7,11) $(\forall n)[n\in \mathbf{N}_2\to(\exists i)[i\in \mathbf{N}_2\wedge 1\leqslant i \leqslant a2^n\wedge \xi\in[(i-1)/2^n,\ i/2^n)]]$，

或者成立

(7,12) $(\exists n)[n\in \mathbf{N}_2\wedge(\forall i)[i\in \mathbf{N}_2\wedge 1\leqslant i \leqslant a2^n\longrightarrow \xi\notin[i-1)/2^n,\ i/2^n)]]$。

当 (7,11) 成立时，对每个 $n\in \mathbf{N}_2$ 存在 i_n 使得 $\xi\in[i_n-1)/2^n,\ i_n/2^n)$。这样，对每个 $n\in \mathbf{N}_2$ 存在唯一的一个区间系列使得

(7,13) $\xi\in[(i_n-1)/2^n,\ i_n/2^n)\subset[(i_{n-1}-1)/2^{n-1},\ i_{n-1}/2^{n-1})\subset\cdots\subset[(i_1-1)/2,\ i_1/2)\subset[*o,\ a)$。

这样，对每个 $n\in \mathbf{N}_2$ 由$[(i_n-1)/2^n,\ i_n/2^n)$组成区间套。由 (7,13) 知

(7,14) $\xi\in\bigcap_{i\in i_2}[(i_n-1)/2^n,\ i_n/2^n)$。

由此推得$\xi\in \mathbf{A}_2\subset \mathbf{U}_2$。

我们不知道是否成立$\xi\in \mathbf{R}_2$，如果成立，则可推得$\mathbf{A}_2=\mathbf{R}_2$。

现在研究当 (7,12) 成立的情况。此时，存在$n\in \mathbf{N}_2$，$[*o,\ a)$被分成$a2^n$个子区间$[(i-1)/2^n,\ i/2^n)$，$1\leqslant i\leqslant a2^n$，$\xi$不属于其中任何一个。于是，n是无限大。由于这些区间

与自然数 1，2，3，…，$a2^n$ 有同样的顺序。又由于 ξ 构成这些区间的一个分划，所以存在第二类 N_2 分划 w，它以同样的次序分割自然数组{1，2，3，…，$a2^n$}。

于是在形式上成立 $\xi = w/2^n$。

此时 $\xi \notin \mathbf{A}_2$，即 ξ 是 $\mathbf{U}_2$ 的一个潜在数，$\xi = w/2^n$，，w 是一个潜在自然数，n 是一个无限大自然数。

由此我们得到一个基本定理

（7,15）　若 $\xi \in \mathbf{U}_2$，则有两种可能

1. $\xi \in \mathbf{A}_2$，更精确地说，ξ 是个 $\mathbf{M}^2$［二进位实在数］，
2. ξ 是一潜在数，可表为 $\xi = w/2^n$，其中 w 是个潜在自然数，n 是个无限大自然数。

由此可知，为了清楚地表示 $\mathbf{U}_2 \setminus \mathbf{A}_2$ 的元素，不但需要一个无限大 $n \in \mathbf{N}_2$，还要一个潜在自然数 $w \in \mathbf{DN}_2 \setminus \mathbf{N}_2$。这就是说，在 $\mathbf{M}_2$ 中，作为计数集合，不仅需要 $\mathbf{N}_2$，而且需要 $\mathbf{DN}_2$。

关于 $\mathbf{U}_2$ 中的加法，可以如下定义。

若 t 和 $w \in \mathbf{U}_2$，$t = (l(t)\ |m(t)|\ u(t))_2$ 和 $w = (l(w)\ |m(w)|\ u(w))_2$，其中 l(t) 是 t 的下集合，m(t) 是 t 的中集合，如此等等。我们定

义

$$(7,16)\qquad l(t+w)=\{z\mid z=x+y\wedge x\in l(t)\wedge y\in l(w)\}$$

$$(7,17)\qquad u(t+w)=\{z\mid z=x+y\wedge x\in u(t)\wedge y\in u(w)\}。$$

不难看出：$l(t+w)$的最小上界$a\in \mathbf{U}_2$，$u(t+w)$的最大下界$b\in \mathbf{U}_2$和$a\leqslant b$，对于任意x满足$a\leqslant x\leqslant b$，我们定义x满足t和w的加法关系，记作

$$x\$t+w，其中 x\in[a,b]，$$

如果$a=b$，则定义$a=t+w$，这时加法才有唯一结果。

例如，当$t=-\infty$，$w=+\infty$，我们有

$$x\$-\infty+\infty，其中 x\in[-\infty, +\infty]，$$

或者简单记作：$-\infty+\infty\in[-\infty, +\infty]$。类似有$\mathbf{0}_-+\mathbf{0}_+\in[\mathbf{0}_-, \mathbf{0}_+]$。此外不难看出：$\mathbf{0}_++\mathbf{0}_+=\mathbf{0}_+$，$+\infty+\infty=+\infty$，等等。

总之，在$\mathbf{U}_2$中加法只是一个三元关系，而不是函数关系。在$\mathbf{A}_2$中加法就是函数关系了。还可以用此法定义有限个数目的加法。

关于$\mathbf{U}_2$中的乘法也可类似地定义。乘法在$\mathbf{U}_2$中只是一个三元关系，而不是函数关系。不难看出：$\mathbf{0}_+\cdot\mathbf{0}_+=\mathbf{0}_+$，$\mathbf{0}_-\cdot\mathbf{0}_-=\mathbf{0}_+$，

$+\infty \cdot +\infty = +\infty$ 和 $+\infty \cdot \mathbf{0}_{+} \in [\mathbf{0}_{+}, +\infty]$ 等。

自然，在 $\mathbf{U}_2$ 乘法和加法都服从交换律。

对 $\mathbf{U}_2$ 的每个元素可以如下定义负元素。设 $t \in \mathbf{U}_2$，$t = (l(t) | m(t) | u(t))_2$，令

(7,18) $\overline{l}(t) = \{x | x = -y \wedge y \in l(t)\}$

(7,19) $\overline{m}(t) = \{x | x = -y \wedge y \in m(t)\}$

(7,20) $\overline{u}(t) = \{x | x = -y \wedge y \in u(t)\}$，

我们定义 t 的负元素为

(7,21) $-t = \left(\overline{u}(t) | \overline{m}(t) | \overline{l}(t)\right)_2$。

不难看出：$\mathbf{0}_{-} = -\mathbf{0}_{+}$，$-(-\infty) = +\infty$ 和 $-\mathbf{0}_{-} = \mathbf{0}_{+}$ 等。

类似对 $\mathbf{U}_2$ 的非零元素可定义逆元素而且不难看出：$\mathbf{0}_{+}^{-1} = +\infty$，$\mathbf{0}_{-}^{-1} = -\infty$ 和 $-\infty^{-1} = \mathbf{0}_{-}$ 等。

为了使加法的表示形象化，我们在上面把

“x \$ t+w，其中 $x \in [a,b]$”

记为 $t+w \in [a, b]$，进一步可记为：$\{t+w\} = [a,b]$。这样加法的交换律可表示为

(7.22) $\{x+y\} = \{y+x\}$。

对 $\mathbf{U}_2$ 中的乘法也可引进类似的记号，于是乘法的交换律可表示为

(7,23) $\{x \cdot y\} = \{y \cdot x\}$。

不难看出：$0\in\{(-x)+x\}$和$1\in\{x^{-1}\cdot x\}$。至于U_2中的分配律，请读者仔细讨论，即讨论

(7,24)　$\{x(y+z)\}=\{xy+xz\}$

在U_2是否成立。以上是关于U_2的算术运算。

我们现在讨论U_2中的极限运算。在这里与其采用拓扑方法，不如直接推广Weierstrass的方法。

设$p\subset U_2$和$x\in U_2$，我们定义

(7,25)　x是p的聚点$\longleftrightarrow(\forall a)(\forall b)[a\in U_2\wedge b\in U_2\wedge a<x<b\longrightarrow(\exists y)[y\neq x\wedge y\in p\wedge a<y<b]]$，

(7,26)　$+^*\infty$是p的聚点$\longleftrightarrow(\forall a)[a\in U\longrightarrow(\exists y)[y\in p\wedge a<y]]$。

进一步设$f\in ft_2(p,\ U_2)$，$s\in U_2$和x是p的聚点，我们定义

(7,27)　$\lim\limits_{t\to x}f(t)=s\longleftrightarrow(\forall a)(\forall b)[a\in U_2\wedge b\in U_2\wedge a<s<b\longrightarrow(\exists c)(\exists d)[c\in U_2\wedge d\in U_2\wedge c<x<d\wedge(\forall t)[t\in p\wedge t\neq x\wedge c<t<d\longrightarrow a<f(t)<b]]]$，

(7,28)　$\underline{\lim}_{t\to x}f(t)\geqslant s\longleftrightarrow(\forall a)[a\in U_2\wedge a<s$

$\rightarrow(\exists c)(\exists d)[c\in \mathbf{U}_2\wedge d\in \mathbf{U}_2\wedge c<x$

$<d\wedge(\forall t)[t\in p\wedge c<t<d$

$\rightarrow a<f(t)]]]$;

(7,29) $\lim\limits_{t\rightarrow x} f(t)=+*\infty\longleftrightarrow(\forall a)[a\in \mathbf{U}_2$

$\rightarrow(\exists c)(\exists d)[c\in \mathbf{U}_2\wedge d\in \mathbf{U}_2\wedge c$

$<x<d\wedge(\forall t)[t\in p\wedge c<t<d$

$\rightarrow a<f(t)]]]$,

(7,30) $\lim\limits_{t\rightarrow +*\infty} f(t)=s\longleftrightarrow(\forall a)(\forall b)[a\in \mathbf{U}_2$

$\wedge b\in \mathbf{U}_2\wedge a<s<b\rightarrow(\exists c)[c\in \mathbf{U}_2$

$\wedge(\forall t)[t\in p\wedge c<t\rightarrow a<f(t)<b]]$,

后式中设 $+*\infty$ 是 p 的聚点。

在 $\mathbf{U}_2$ 中的极限，可记为 $\mathbf{U}_2\lim$，限制在 $\mathbf{A}_2$ 则成为 $\mathbf{A}_2\lim$，限制在 $\mathbf{R}_2$ 则成为 $\mathbf{R}_2\lim$，限制在 $^*\mathbf{M}$ 则成立 $^*\lim$，等等。不难看出

(7,31) $\mathbf{U}_2\lim\limits_{t\rightarrow+\infty} e^{-t}=0_+$，$\mathbf{U}_2\lim\limits_{t\rightarrow-\infty} e^{-t}=+\infty$,

(7,32) $\mathbf{U}_2\lim\limits_{t\rightarrow 0_+} 1/t=+\infty$, $\mathbf{U}_2\lim\limits_{t\rightarrow 0_-} 1/t=-\infty$,

和对任何 $s\in \mathbf{U}_2$ 都不能够使得 $\mathbf{U}_2\lim\limits_{t\rightarrow+\infty}\sin t=s$。

如果 $x\in p\subset \mathbf{U}_2$，$f\in ft_2(p,\mathbf{U}_2)$ 和 x 是 p 的聚点，我们定义

(7,33) f 在 x 是 $\mathbf{U}_2$ 连续的 $\longleftrightarrow \mathbf{U}_2\lim\limits_{t\rightarrow x} f(t)$

$=f(x)$。

进一步设 $(\forall x)[x\in p\rightarrow x$ 是 p 的聚点]，我们定义

(7,34)　$f \in \mathbf{U}_2C(p) \longleftrightarrow (\forall x)[x \in p \to f$ 在 x 是 $\mathbf{U}_2$ 连续的]，称为 f 在 p 上是 $\mathbf{U}_2$ 连续的。

在 $\mathbf{M}_2$ 我们有如下的定理

(7,35)　若 $a, b \in {}^*\mathbf{R}$，$a < b$，$f \in {}^*ft([a,b], {}^*\mathbf{R})$，$f$ 在 $[a, b]$ 上是 ${}^*\mathbf{M}$ 连续增加的，于是存在 $F \in ft_2([a,b], \mathbf{U}_2)$ 使得 F 在 $[a, b]$ 上是 $\mathbf{U}_2$ 连续增加的，而且对 $x \in {}^*\mathbf{R} \cap [a, b]$ 成立 $F(x) = f(x)$。

这时称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 由 ${}^*\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{U}_2$ 的延拓。

证明：只需注意到 $\mathbf{U}_2$ 是所有 $\mathbf{Q}_2$ 的 Dedekind 分划就足够了。

容易看出以下两个事实：

1．函数 $f(t) = e^t$ 可自然延拓为 $ft_2(\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_2)$ 的函数，使得 $e^{+\infty} = +\infty$，$e^{-\infty} = 0_+$，$e^0 = 1$，和 $e^{0+} = 1 + 0_+$。e^t 是 $\mathbf{U}_2$ 连续的。

2．$f(t) = \sin t$ 可延拓为 $ft_2(p, \mathbf{U}_2)$ 的一个函数，p 是 $\mathbf{U}_2$ 的子集，$+\infty \notin p$，$-\infty \notin p$，但对任意 $r \in {}^*R$，$(-\infty + r, +\infty + r) \subseteq p$。

现在举两个例子如下。

例1．我们研究幂级数

$$(7,36)\qquad s(x, n) = {*}\sum_{k=0}^{n} x^k,$$

其中 $n\in{}^*N$ 和 $x\in{}^*R$，因此是 $^*M$ 的函数。现在定义

(7,37) $s(x,+\infty)=U_2\lim_{n\to+\infty}s(x,n)$

因在 $^*M$ 中成立

(7,38) $s(x,n)=(1-x^{n+1})/(1-x)$

我们有

(7,39) $s(x,j)<1/(1-x)-0_+<s(x,i)$

其中 $0_+<x<1-0_+$，$j\in{}^*N$ 是有限的，$i\in{}^*N$ 是无限的。由此推得

(7,40) $s(x,+\infty)=1/(1-x)-0_+$，即

$$*\sum_{k=0}^{+\infty}x^k=1/(1-x)-0_+,$$ 当

$0_+<x<1-0_+$。当 $-1+0_+<x<0_-$，我们有

(7,41) $$s(x,+\infty)=*\sum_{k=0}^{+\infty}x^k$$

$$=1/(1-x)\pm0_+。$$

例2. 我们研究正弦级数

(7, 42) $$s(x,n)=*\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

其中 $n\in{}^*N$ 和 $x\in{}^*R$，因此是 $^*M$ 的函数。当 $0<x<+\infty$，我们定义

(7,43) $s(x,+\infty)=U_2\lim_{n\to+\infty}s(x,n)$。

因为对每个有限的 x，若 m 足够大，我们有

(7,44)　$s(x,\ 2m+1) < \sin x < s(x,\ 2m)$

故成立

(7,45)　$U_2 \lim_{m\to+\infty} s(x,\ 2m+1) = \sin x - 0_+$

(7,46)　$U_2 \lim s(x,\ 2m) = \sin x + 0_+$。

最后得到

(7,47)　$s(x,+\infty) = * \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$$= \sin x \pm 0_+,$$

它在 M 的简化表示为

(7,48)　$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x$

现在讨论 U_2 中的积分。

设 $a < b \in {}^*\mathbf{R}$，在 $^*\mathbf{M}$ 中 f 和 g 是定义于 [a, b] 的严格单调连续函数，又 F(x) 和 G(x) 分别是 f(x) 和 g(x) 由 $^*\mathbf{R}$ 到 U_2 的延拓，又对所有 $x \in [a,\ b] \cap {}^*\mathbf{R}$ 成立 $f^{*\prime}(x) = g(x)$，于是

(7,49)　对 $y \in [a,\ b] \cap U_2$ 称 G(y) 为 F(y) 的导数，记为 $F^{*\prime}(y) = G(y)$；对 $x < y \in [a,\ b] \cap U_2$，称 F(y) − F(x) 为 G(t) 由 x 到 y 的定积分，记为 $*\int_x^y G(t)dt = F(y) - F(x)$；称 F(t) +

C为G(t) 的不定积分，记为

$$*\int G(t)dt = F(t) + C,\ 其中C \in {}^*R$$

现在举几个例子如下。

例3. $u(x) = \ln x$，$b \leqslant x \leqslant B$，$bB = 1$ 和 B 是正无限大。我们有 $u'(x) = 1/x$，$u^{*\prime}(0_+) = +\infty$，$u^{*\prime}(+\infty) = 0_+$ 和 $*\int_{0_*}^{+\infty}(1/x)dx = \ln(+\infty) - \ln 0_+ = +\infty + \infty = +\infty$。

例4. $u(x) = x^2$，$0 \leqslant x < +*\infty$。我们有 $u^{*\prime}(x) = 2x$，$u^{*\prime}(0_+) = 0_+$，$u^{*\prime}(+\infty) = +\infty$，$*\int_{0_+}^{+\infty} 2xdx = +\infty$。

例5. $u(x) = \sin x$，$0 \leqslant x \leqslant \pi/2$。$u^{*\prime}(x) = \cos x$，$u^{*\prime}(0_+) = \cos 0_+ = 1 - 0_+$，$u^{*\prime}(\pi/2 - 0_+) = \sin 0_+ = 0_+$ 和 $*\int_{0_+}^{\pi/2 - 0_+}\cos x\,dx = \sin(\pi/2 - 0_+) - \sin 0_+ = 1 - 0_+$

例6. $u(x) = e^x$，$-*\infty < x < +*\infty$

$u^{*\prime}(x) = e^x$，$u^{*\prime}(0_+) = 1 + 0_+$，$u^{*\prime}(0_-) = 1 - 0_+$，$u^{*\prime}(+\infty) = +\infty$，$u^{*\prime}(-\infty) = 0_+$ 和 $*\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = +\infty - 0_+ = +\infty$

关于导数的定义还可以推广。

若 $a < b \in {}^*R$，$f \in ft_2({}^*R \cap [a, b], {}^*R)$，

$x\in{}^*\mathbf{R}\cap[a, b]$，$h\neq 0\in{}^*\mathbf{R}$，我们定义

$$(7,50)\quad \mathbf{U}_2\frac{df}{dx}(x)=\mathbf{U}_2\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

称 $\mathbf{U}_2\frac{df}{dx}(x)$ 为 $f(x)$ 在点 x 的导数，或记作 $\mathbf{U}_2f'(x)$；称 $f(x)$ 在点 x 是 $\mathbf{U}_2$ 可导的，若 $\mathbf{U}_2f'(x)$ 存在；称 $f(x)$ 在 ${}^*\mathbf{R}\cap[a,b]$ 可导，若 $f(x)$ 在任意点 $x\in{}^*\mathbf{R}\cap[a, b]$ 可导。

若 $a<b\in\mathbf{U}_2$，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 是 $\mathbf{U}_2$ 连续的，$f\in f\varepsilon_2({}^*\mathbf{R}\cap[a, b], {}^*\mathbf{R})$，$f$ 在 ${}^*\mathbf{R}\cap(a, b)$ 是 $\mathbf{U}_2$ 可导的和 $\mathbf{U}_2f'(x)=g(x)$ 对 $x\in{}^*\mathbf{R}\cap(a, b)$ 成立，又 $g(x)$ 在 (a, b) 是 $\mathbf{U}_2$ 连续的，则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 的导数，记作 $\mathbf{U}_2f'(x)=g(x)$，并称 $f(y)-f(x)$ 是 $g(t)$ 由 x 到 y 的中心 $\mathbf{U}_2$ 定积分，记作

$$\mathbf{CTU}_2\int_x^y g(t)dt=f(y)-f(x)$$

其中 $x<y\in\mathbf{U}_2\cap[a, b]$，又称 $f(t)+C$ 是 $g(t)$ 的不定积分，记作

$$\mathbf{U}_2\int g(t)dt=f(t)+C,$$

其中 $C\in{}^*R$ 是任意的。

例7. 若

$$(7,51)\quad f(x)=\begin{cases}f_1(x)=x^3, & 0\leqslant x\leqslant+\infty\\ f_2(x)=x^2, & +\infty<x<+*\infty,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $[0, +*\infty)$ 是 U_2 连续的，$f\in ft_2(*R\cap[0,+*\infty), *R)$ 和 $f(x)$ 在 $*R\cap(0, +*\infty)$ 是 U_2 可导的。又设

$$(7,52)\qquad g(x)=\begin{cases}3x^2, & 0\leqslant x\leqslant+\infty\\ 2x, & +\infty<x<+*\infty,\end{cases}$$

则 $g(x)$ 在 $[0, +*\infty)$ 是 U_2 连续的。于是 $g(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +*\infty)$ 的导数，成立 $U_2f'(x)=g(x)$。特别有 $U_2f'(+\infty)=g(+\infty)=+\infty$。又若 $+\infty<B<+*\infty$，则 $g(x)$ 的中心 U_2 定积分

$$(7,53)\qquad CTU_2\int_0^B g(t)dt=f(B)-f(0)=B^2$$

实际上，$g(t)$ 在 U_2 的定积分应为

$$(7,54)\qquad U_2\int_0^B g(t)dt$$

$$=*\int_0^{+\infty}3t^2dt+*\int_{+\infty}^B 2tdt$$

$$=f_1(+\infty)-0+B^2-f_2(+\infty)$$

$$=CTU_2\int_0^B g(t)dt$$

$$+[f_1(+\infty)-f_2(+\infty)],$$

其中有个不定项

$$(7,55)\qquad [f_1(+\infty)-f_2(+\infty)]=+\infty-\infty$$

由此看出，对于一个函数在 U_2 的定积分应分段进行，其值等于它的中心 U_2 定积分加

上一些不定项。读者可以仔细研究。

附带说一句，在 U_2 中的加法和乘法关系是可交换的和可结合的，对于正数而言也服从分配律。

8

新的Delta 函数论和物理学



物理学中一些抽象的点量，可以看作体积小密度大的分布的极限。假设某物体的质量（或电荷）为1，分布在半径为a的小球内，则当$r \leq a$时，密度$\rho(r)$很大，而当$r > a$时，$\rho(r)=0$。极限情况是：a趋于0。但这种极限情况，在Dirac之前被认为是毫无意义的。自从Dirac中1926年引进Delta函数之后，才开始用连续分布的极限来描写点量。这实际上已是一种有用的非标准分析的函数，过去却放在标准分析中讨论。但在标准分析的范围内，这样的Delta函数是具有奇异性的。

按照物理学家的定义，Delta函数的含义

如下：

$$(8,1)\qquad \delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \infty, & x=0,\end{cases}$$

并具有积分性质

$$(8,2)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx=1$$

但这样的说法有明显的逻辑上的毛病。由于在标准分析中，∞ 不是一个确定的数，更精确地说，∞ 不是有序域 **R** 的一个成员，因为 ∞ 并不满足四则运算的规律。如果勉强把 ∞ 加到 **R** 中去，则所得到的集合已经不能构成一个有序域了。这样看来，（8,1）式没有明确的数学含义，而（8,2）则是对一个数学意义不明确的对象进行积分，就更令人费解了。这表明，在标准分析中，$\delta(x)$在 $x=0$ 这点具有奇异性。

Delta 函数的流派很多。数学家们想了很多办法来克服这个困难。在伊凡宁柯〔25〕中介绍了一种建立在 Stieltjes 积分理论上的 Delta 函数的理论，在盖尔芳特〔3〕中则系统地介绍了他自己的工作。Schwarz〔81〕首次使广义函数系统化。这些方法并没有搞清 $\delta(x)$ 在 $x=0$ 的局部结构，他们回避了 $\delta(x)$在 $x=0$

的局部奇异性而去研究一些整体性质。他们的方法在处理 Delta 函数的乘积和方幂等问题时碰到了困难。

在非标准分析诞生之后，1974 年 Thurber 和 Katz 在〔88〕中引入了 Delta 函数的分数幂，1975 年 Lightstone 和 Wang 在〔73〕中用非标准分析研究 Delta 函数并引入了"筛取"的概念。王进儒在〔21〕中用无限小方法研究 Delta 函数并指出下面的 Delta 函数并不包括在〔73〕之中：

$$(8,3) \qquad \frac{\sin kx}{\pi x}$$

它是由 de Broglie 波规格化所得到的 Delta 函数。李邦河在〔30〕中用非标准分析的方法研究了 Schwarz 广义函数，虽然他用了很巧妙的推理技巧，但所得的基本结果

$$(8,4) \quad \delta(x)\cdot\delta(x)=\delta(x)/2\pi\rho,$$

其中 ρ 是正无限小，与物理学不符。例如读者可参考 Edward〔63〕的 502 页和周世勋〔32〕的 153—154 页。1982 年 Raju CK〔78〕讨论了 Delta函数的乘积和合成，他比较注意和物理学保持一致。

让我们再回忆一下 Von Neumann 的话：

“必须改变的是数学技巧而不是物理理论。”

因为物理学，特别是量子力学的发展，我们的知识深入到微观世界。已经触及了一些M_2（或$^*M$）的函数，首先是各色各样的 Delta 函数，但其时的分析学框架还是标准的，很难描述清楚这些函数，只好认为它们是奇异函数或泛函。那时的数学还不能揭示问题的实质。现在已经有了非标准分析和无限小，我们可以把问题澄清了。

1979年作者写了论文[4]，其中初步描述了 Delta 函数，后来又与石最坚合写了[5]，把 Delta 函数与物理学较好地结合起来，1984年又出版了[8]，在数学理论方面进一步系统化并加深了和物理学的联系。1986年作者写了讲义[92]并使 Delta 函数理论方法作了改进。这种方法被谭天荣在[37]中解决了提前响应中的一个问题。这个问题用标准分析的方法是难以解决的。

我们的基本观点如下：每个 Delta 函数是M_2（或$^*M$）的单个的函数，例如$\delta(x)$，它对 M 的某个函数集合Φ的每个函数$g(x)$具有筛取性质

$$(8,5)\qquad \mathrm{st}\left({}^*\!\int_a^b \delta(x)g(x)dx\right)=g(0),$$

其中 $a<b\in U_2$。其中 $\delta(x)$是筛取函数，在第二相 M_2之中，$g(x)$是被筛取函数，Φ 是被筛取集合，在第一相 M 之中，这是在研究两相之间的关系，所以作者引进了两相微积分学的名称。在(8,5)中，(a,b)是筛取区间，g(0)是筛取值。

Delta 函数论不是一门纯数学，它是数学物理的一支，是一门边缘学科。因此，在建立理论时，必须考虑到物理学和数学两方面的习惯和传统。

按照物理学的背景，Delta 函数应分为两类：

1. 点 Delta 函数，适合于描写物理中的点量；

2. 由正交归范系所导出的 Delta 函数，适合于处理量子力学中特征态的正交条件。

众所周知，$C^\infty(\mathbf{R})$代表 M 中无穷连续可微的函数集，而 $C_0^\infty(\mathbf{R})$是 $C^\infty(\mathbf{R})$中具有紧致支集的函数所组成的子集。又 C(p)代表 M 中定义于 p 的连续函数。

点 Delta 函数的定义。函数 $\delta\in{}^*ft\,({}^*\mathbf{R},{}^*\mathbf{R})$称之为点 Delta 函数，当且仅当

(8,6) 1. δ 在 $^*\mathbf{R}$ 的每个子区间是 *Riemann

可积，又$*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta(x)dx=1$，

2．对每个$g\in C_0^\infty(\mathbf{R})$，$\delta$具有筛取性质 $$st\left(*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta(x)g(x)dx\right)=g(0)。$$

在数学物理中，关于 Delta 函数有两种典型的理论：

1．共性理论，在其中不必指出 Delta 函数的个体表示，如 Schwarz 的理论就是一种共性理论；

2．个性理论，在其中必须指出 Delta 函数的个体表示式，如 Thurber 和 Katz 的理论。

在共性理论中，我们必须假定某些共性条件，如$\delta\in *C^{*\infty}(^*\mathbf{R})$，这里$*C^{*\infty}(^*R)$是$C^\infty(\mathbf{R})$转移而来的，然后推导出某些性质。

在 Delta 函数的个性理论中，我们必须指出作为筛取函数的 Delta 函数，即$\delta(x)$在$^*M$的特殊表达式，然后讨论它的一些性质，如：1．被筛取函数集合是什么？2．筛取区间是什么？和3．筛取值是什么？

例1．下述函数

$$(8,7)\qquad \delta_1(x)=\delta_1(x,b)=\frac{1}{b\sqrt{\pi}}*e^{-(x/b)^2}$$

当 $b>0$ 是无限小实数，是点 Delta 函数，若筛取区间是$(-*\infty, +*\infty)$，则有一个被筛取集合是 φ_1，这里 $\varphi_1=\{q \mid q\in C((-\infty,+\infty))$ 并存在 $s_1, s_2>0$ 使得对每个 $\mathbf{x}\in\mathbf{R}$ 成立 $|q(\mathbf{x})| \leqslant s_1\exp\{s_2x^2\}\}$。

自然，$\delta_1(\mathbf{x})$是正态分布函数。如果在 M 中用标准实数来表示 $\delta_1(\mathbf{x})$，则当 $\mathbf{x}\in\mathrm{mon}(*0)$时，$\mathrm{st}(\delta_1(\mathbf{x}))$不能表示为一个标准数，因此函数在 $\mathbf{x}=0$ 具有奇异性。在无线电通讯理论中用到了这个 Delta 函数。

若筛取区间是$(-\infty, +\infty)$，则 $\delta_1(\mathbf{x})$ 的被筛取集合是 ψ_1，可取 $\psi_1=C((-\infty,+\infty))$。

例2. 下述函数

$$(8,8)\qquad \delta_2(x,b)=\frac{*e^{x/b}}{b(*e^{x/b}+1)^2}$$

当b 是正无限小实数时，是点 Delta 函数，当筛取区间是$(-*\infty, +*\infty)$，则有个被筛取集合是 φ_1。当筛取区间是$(-\infty, +\infty)$，则$\psi_1=C((-\infty,+\infty))$是一个被筛取集合。

$\delta_2(x)$是物理学中 Fermi 分布中所出现的 Delta 函数，当 $x\in\mathrm{mon}(*0)$时，这个函数在 M中表达时没有合适的标准值，因而具有奇异性。

例3. 下述函数

$$(8,9)\qquad \triangle_1(x,B)=\frac{{}^*\sin Bx}{\pi x}.$$

当 B 是正无限大实数时，是点 Delta 函数，若筛取区间是$(-*\infty,+*\infty)$，则有一个被筛取集合是Φ_1，$\Phi_1=\{q||q|$在$(-\infty,+\infty)$是 Riemann 可积，$q(x)$在 $x=0$ 连续，而在 q 在$[-t,t]$有界变化，这里 $t>0\}$。若筛取区间是$(-\infty,+\infty)$，则有一个被筛取集合是Ψ，这里$\Psi_1=\{q||q|$在任意有限区间 Riemann 可积，$q(x)$在 $x=0$ 连续，并在$[-t,t]$有界变化，这里$t>0\}$。

在物理上，$\triangle_1(x,B)$ 是 de Broglie 波正交归范化所产生的 Delta 函数。在**M**中看来，它的奇异范围更大，对每个 $r\in\mathbf{R}$ 和$x\in m.on(r)$，它都具有奇异性。$\triangle_1(x)$是非常有趣的函数，它有无限大的圆频率 B，表示振动是非常迅速的。当 $x=0$，振幅为 B/π，即振动是很强大的。当 x 是无限大时，$\triangle_1(x)$的振幅为无限小。但当 x 是有限数而不是无限小时，其振幅也是有限数而不是无限小。

例4. 下述函数

$$(8,10)\qquad \delta_3(x,b)=\frac{b}{\pi(x^2+b^2)}$$

当 b 是正无限小实数时，是点 Delta 函数，当筛取区间是$(-{}^*\infty, +{}^*\infty)$时，$\delta_3(x)$的一个被筛取集合是 $\varphi_3=\{q \mid q\in \mathbf{C}(\mathbf{R})$ 且$|q(x)|\leqslant m$ 对 $x\in \mathbf{R}$ 成立$\}$。当筛取区间是$(-\infty,+\infty)$时，δ_3 的一个被筛取集合是 ψ_1。

$\delta_3(x)$是在研究电磁波散射时所碰到的 Delta 函数。

为了方便，在$\mathbf{M}_2$中我们引入辅助函数

$$(8,11)\qquad \delta_0(t)=\begin{cases}0_+, & 0_+<|t|<+\infty\\ +\infty, & |t|<0_+\end{cases}$$

注意到 $\delta_1(t,x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\pi}}e^{-(t/x)^2}$，其中$0<x$ 和 $t\in {}^*\mathbf{R}$。

我们定义

$$(8.12)\qquad \delta_1(t,0_+)=\mathbf{U}_2\lim_{x\to 0_+}\delta_1(t,x)。$$

不难看出 $\delta_1(t,0_+)=\delta_0(t)$，若 t 的变域如(8,11)所表示。

如果注意 $\delta_3(t,x)=\dfrac{x}{\pi(t^2+x^2)}$，其中 $0<x$ 和 $t\in {}^*\mathrm{R}$。我们定义

$$(8,13)\qquad \delta_3(t,0_+)=\mathbf{U}_2\lim_{x\to 0_+}\delta_3(t,x)。$$

不难看出 $\delta_3(t,0_+)=\delta_0(t)$

如果我们想在 $\mathbf{M}$ 中将 $\delta_0(t)$表示出来，

限于 **R** 的表示能力，我们只能表示为(8,1)中的 $\delta(t)$。即把 0_+ 看成了 0，而成为

$$(8,14)\qquad \delta_0(t)=\begin{cases}0 & ,\ 0<|t|<+\infty\\ +\infty, & t=0\end{cases}。$$

而这样表示的 $\delta_0(t)$ 或(8,1)中的 $\delta(t)$ 就成为自相矛盾的标准函数，因为它不能自圆其说地说明(8,2)成立。因为 $+\infty\notin \mathbf{R}$，所以 $\delta(t)$ 在 **M** 是没有完整定义的。

$\delta_0(t)$ 是 $\delta(t)$ 的本源，$\delta_1(t,0_+)$ 和 $\delta_3(t,0_+)$ 等又是 $\delta_0(t)$ 的本源。与其去研究具有运算不确定性的外函数 $\delta_1(t,0_+)$ 和 $\delta_3(t,0_+)$ 等，还不如直接把内函数 $\delta_1(t,b)$ 和 $\delta_3(t,b)$ 等用到物理学中去。这样会使问题明朗和容易。

我们现在研究 $\triangle_1(t,x)=\dfrac{\sin tx}{\pi t}$

当 $0<x$ 和 $t\in{}^*\mathbf{R}$ 的极限

$$(8,15)\qquad \triangle_1(t,+\infty)=\mathbf{U}_2\lim_{x\to+\infty}\triangle_1(t,x)。$$

不难看出

$$(8,16)\begin{cases}\triangle_1(t,+\infty)=+\infty, & 当|t|<0_+，和\\ |\triangle_1(t,+\infty)|\leqslant\dfrac{1}{\pi t}, & 当\ 0_+<|t|。\end{cases}$$

当 $0_+<|t|$ 时 $\triangle_1(t,+\infty)$ 并不等于 $\delta_0(t)$。对物理学而言，与其采用复杂的外函数

$\triangle_1(t, +\infty)$，不如采用它的本源函数$\triangle_1(t,B)$，其中$B\in {}^*R$是正无限大。

注意：$x=0$是$\triangle_1(x,B)$的可去奇点，并有

(8,17) $\quad \triangle_1(0,B)=B/\pi$。

例5. 下述函数

(8,18) $$\triangle_2(x,B)=\frac{*\sin^2 Bx}{\pi Bx^2}$$

当$B\in {}^*R$是正无限大时，是点Delta函数，当筛取区间是$(-*\infty, +*\infty)$时，$\triangle_2$的一个被筛取集合为φ_3。当筛取区间是$(-\infty, +\infty)$，它的一个被筛取集合是Ψ_1。

不难看出$\triangle_1$和$\triangle_2$之间成立下述关系

(8,19) $$\triangle_1^2(x,B)=\left(\frac{*\sin Bx}{\pi x}\right)^2$$

$$=\triangle_1(0,B)\triangle_2(x,B)。$$

这是一个关于Delta函数的平方关系，$\triangle_2$为量子力学中计算跃迁几率所碰到的Delta函数，请参看周世勋[31]的153—154页和Edward[63]的502页。这里的前提、推理过程和结果都与物理学一致，一切清楚明白而且是严格的。

在Schwarz将广义函数理论系统化之后不久，他就发现广义函数的平方不好处理。像

(8,19)这样的关系在广义函数理论中讨论起来是不方便和不自然。因此有关Delta函数的平方和乘幂问题首先受到人们的关心。其实问题可以稍为一般化一点。设$F \in ft(\mathbf{R},\mathbf{R})$是一个标准函数和$\delta(x)$是一个点Delta函数，于是有两类复合函数：$\delta(F(x))$和$F(\delta(x))$。我们首先讨论$F(\delta(x))$及其筛取性质。

首先我们注意到：$F(\delta(x))$具有很强的个性，对不同的$\delta(x)$有不同的结果。而Schwarz的广义函数论主要涉及Delta函数的共性，因此用广义函数来处理$F(\delta(x))$就有些不方便。

我们将分几种情况进行讨论。

1. 设$F(y)=y^2$，那么$F(\delta(x))=\delta^2(x)$，这就是Delta函数的乘积。由于此乘积对物理学有用，所以举一些个体性的例子如下。

我们已经碰到一个例子，就是(8,19)，它描述了$\triangle_1^2(x,B)$的表示。但一个例子不足以说明问题，我们再举一些个体性的例子。

例6. 对$\delta_1(x,b)$我们可算得

(8,20) $$\delta_1(0,b)=1/(b\sqrt{\pi})$$

和平方关系

(8, 21) $$\delta_1^2(x,b)=\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_1(0,b)\delta_1(x,b_1)$$

其中 $b_1 = b/\sqrt{2}$。显然，（8,19）和（8,21）的系数不同。

例 7. 下述函数

$$(8,\ 22) \qquad \delta_4(x,b) = \frac{b^2}{2(x^2+b^2)^{3/2}}$$

当 $b \in {}^*\mathbf{R}$ 是正无限小，是点 Delta 函数，当筛取区间是（$-{}^*\infty$，$+{}^*\infty$）时，它的一个被筛取集合是 φ_3。

容易看出

$$(8,\ 23) \qquad \delta_4(0,b) = \frac{1}{2b}$$

和

$$(8,\ 24) \qquad \delta_4^2(x,b) = \frac{3\pi}{16}\delta_4(0,\ b)\delta_{25}(x,b)\ ,$$

其中 $\delta_{25}(x,\ b)$ 是另一个点 Delta 函数，这里的系数又变了。

例 8. 对 $\delta_3(x,b)$ 而言，我们有 $\delta_3(0,b) = 1/(\pi b)$ 和以下关系

$$(8,\ 25) \qquad \delta_3^2(x,b) = \frac{1}{2}\delta_3(0,b)\delta_5(x,b)$$

$$= \frac{1}{2\pi b}\delta_5(x,b)$$

这里 $\delta_5(x,b)$ 是一个点 Delta 函数，它的表示如下

(8, 26) $\delta_5(x,b)=\dfrac{2b^2}{\pi(x^2+b^2)^2}$。

公式（8, 25）与李邦河[30]的结果一致，这只是很多特殊结果中的一个，而不是一般规律。

2. $F(y)=y\ln y$

例 9. 我们研究 $F(\delta_1(x,b))$。不难算出

(8,27) $*\int_{-*\infty}^{+*\infty}F(\delta_1(x,b))dx=\ln\dfrac{1}{b\sqrt{\pi e}}$。

令 $K_1=-\ln(b\sqrt{\pi e})$。令

(8, 28) $\delta_6(x,b)=F(\delta_1(x,b))/K_1$,

则 δ_6 是一个点 Delta 函数，当筛取区间是 $(-*\infty, +*\infty)$时，它的一个被筛取集合是 φ_1。

例 10. 我们研究 $F(\delta_3(x,b))$。不难算出

(8, 29) $*\int_{-*\infty}^{+*\infty}F(\delta_3(x,b))dx$

$$=\ln\frac{1}{4\pi b}。$$

令 $K_3=-\ln(4\pi b)$。设

(8,30) $\delta_7(x,b)=F(\delta_3(x,b))/K_3$,

不难看出 δ_7 是一个点 Delta 函数，当筛取区间是 $(-*\infty, +*\infty)$时，它的一个被筛取集合是 φ_3。

由于 $K_1 \neq K_3$，所以公式 (8,28)和(8,30)是不相同的个体公式。

3. $F(y)=y^\alpha$，其中 $0<\alpha\in\mathbf{R}$。

例 11. 我们定义

$$(8,\ 31)\qquad \delta_s(x,b)=\begin{cases}B, & |x|<b/2,\\ B/2, & |x|=b/2,\\ 0, & b/2<|x|.\end{cases}$$

其中 $b\in{}^*\mathbf{R}$ 是正无限小，且 $bB=1$。δ_s 是一个点 Delta 函数，在 $(-*\infty,\ +*\infty)$ 的一个被筛取集合是 $C(\mathbf{R})$。

现在研究 $F(\delta_s(x,b))$。不难看出

$$(8,\ 32)\qquad F(\delta_s(x,b))=\begin{cases}B^\alpha, & |x|<b/2,\\ B^\alpha/2^\alpha, & |x|<b/2,\\ 0, & b/2<|x|.\end{cases}$$

和

$$(8,\ 32)\qquad *\int_{-*\infty}^{*\infty}F(\delta_s(x,b))dx=B^{\alpha-1}$$
$$=\delta_s^{\alpha-1}(0,b).$$

假设

$$(8,\ 33)\qquad \delta_\theta(x,b)=F(\delta_s(x,b))/B^{\alpha-1},\ 即$$

$$(8,\ 34)\qquad \delta_s^\alpha(x,b)=\delta_s^{\alpha-1}(0,b)\delta_\theta(x,b),$$

这里 δ_θ 是一个点 Delta 函数，它在 $(-*\infty,\ +*\infty)$ 的一个被筛取集合是 $C(\mathbf{R})$。

例 12. 我们研究 $F(\delta_1(x,b))$。不难看出

$$(8,\ 35)\qquad F(\delta_1(x,b))=\delta_1^{\alpha-1}(0,b)\delta_1(x,b_1)$$

$/\sqrt{\alpha}$,

其中 $b_1=b/\sqrt{\alpha}$。也就是说

$$(8,\ 36)\quad \delta_1(x,b_1)=\sqrt{\alpha}\,\delta_1^{\alpha}(x,b)/\delta_1^{\alpha-1}(0,b).$$

例13. 当 $\frac{1}{2}<\alpha$ 研究 $F(\delta_3(x,b))$。我们有

$$(8,\ 37)\quad {*\int}_{-*\infty}^{*\infty} F(\delta_3(x,b))dx$$

$$=\frac{1}{\pi^{\alpha}b^{\alpha-1}}B\left(\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}\right).$$

不难看出

$$(8,\ 38)\quad \delta_{10}(x,b,\alpha)=\pi^{\alpha}b^{\alpha-1}F(\delta_3(x,b))$$

$$/B\left(\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}\right)$$

是一个点 Delta 函数，它在 $(-*\infty,+*\infty)$ 的一个被筛取集合是 φ_3。

很容易看出，公式（8，34），（8，36）和（8，38）都是个性很强的公式。显然对 $F(\delta(x))$ 采用个性理论比较合适。

从以上的例子对 Delta 函数的个性已做了一定的说明。以下对点 Delta 函数的共性问题做点说明，首先对 Riemann 反常积分与点 Delta 函数的关系做点说明。主要涉及点 Delta 函数的构造。分以下三种情况。

1. 非负型。在 **M** 设

(8, 39)　$0\leqslant f(t)\in C(\mathbf{R})$，$f(t)$当 $t\in(-\infty,+\infty)$ 是 Riemann 反常可积的且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1.$$

令

(8, 40)　$$y={}^*\int_{-{}^*\infty}^{Bx} f(t)dt,$$

其中 $B\in{}^*\mathbf{R}$ 是正无限大。不难看出 $y^{*\prime}(x)=Bf(Bx)$。

我们有以下定理

(8, 41)　若 $f(t)$满足（8,39），则 $Bf(Bx)$ 是点 Delta 函数，在（$-{}^*\infty$, $+{}^*\infty$）它的一个被筛取集合是 φ_3。

这里的点 Delta 函数是非负型，但不要求是偶函数，适用于描述集中的质量分布。

2. 有限变号型。在 **M** 设

(8, 42)　$f\in C(\mathbf{R})$ 并有反常 Riemann 积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=1$；并对某 $n\in\mathbf{N}$，若

$-\infty=\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots\cdots<\alpha_n<\alpha_{n+1}=+\infty$；

并成立 $f(x)=(-1)^{j+i}f_i(x)$，

当 $\alpha_i < x < \alpha_{i+1}$，

其中 $f_i \in ft((\alpha_i, \alpha_{i+1}), \mathbf{R})$ 且

$f_i(x) \geqslant 0$，

$i=0, 1, \cdots, n$ 和 $j \in \mathbf{N}$。

然后有以下定理

(8, 42) 若 f(t) 满足 (8, 42)的条件，则 Bf(Bx) 是点 Delta 函数，在 $(-{*}\infty, +{*}\infty)$它的一个被筛取集合是 φ_3。

这里的点 Delta 函数是有限变号的，适用于描写集中的正负电荷的分布。

3. 无限变号型。在 **M** 设

(8, 43) $f \in C(\mathbf{R})$ 且具有反常 Riemann 积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1。$$

然后有以下定理

(8, 44) 若 f 满足 (8, 43) 的条件，则 Bf(Bx) 是点 Delta 函数，它在 $(-{*}\infty, +{*}\infty)$ 的一个被筛取集合是 $\Phi_3 = \{q \mid q \in C((-\infty, +\infty)), |q|$有界，并且在任何有限区间上有界变化。$\}$

以上所谈的是关于从 Riemann 反常积分去构造点 Delta 函数的一般方法。以下介绍点 Delta 函数的一些主要性质。

1. $\delta(x-t)$ 的筛取性质。我们有以下共性定理

(8, 45)　若 $t\in\mathbf{R}$，点 Delta 函数 $\delta(x)\in{}^*C({}^*\mathbf{R})$ 和 $q\in C_0^\infty(\mathbf{R})$，则成立

$$\mathrm{st}\left({}^*\int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty}\delta(x-t)q(x)dx\right)=q(t)。$$

或者，有以下共性定理

(8, 46)　若 $t\in\mathbf{R}$，$f(\xi)$ 满足（8, 43）中的条件，又 $\delta(x)=Bf(Bx)$ 和 $q\in\Phi_3$，则成立

$$\mathrm{st}\left({}^*\int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty}\delta(x-t)q(x)dx\right)=q(t)。$$

2. $|a|\delta(ax)$ 的筛取性质。我们有以下共性定理

(8, 47)　若 $0\neq a\in\mathbf{R}$，$f(t)$ 满足（8, 43）中的条件，又 $\delta(x)=Bf(Bx)$，则 $|a|\delta(ax)$ 是点 Delta 函数，它在 $(-{}^*\infty, +{}^*\infty)$ 的一个被筛取集合是 Φ_3。

3. 形如$\delta(F(x))$的复合函数及其筛取性质。

a. 先举一个特别的例子。

设$u(x)=1-e^x$，$q(x)\in C(\mathbf{R})$，$|q(x)|\leqslant m$和（8，7）所表示的$\delta_1(x,b)$，则

$$(8,48)\qquad {}^*\!\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_1(u(x),\ b)q(x)dx$$

$$=\left\{{}^*\!\int_{-\infty}^{-\sqrt{b}}+\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}+\int_{\sqrt{b}}^{1}\right\}\delta_1(u,b)\frac{q(\ln(1-u))}{1-u}du$$

$$=\text{无限小}+q(0)+P_3$$

其中

$$(8,\ 49)\qquad P_3=\frac{1}{b\sqrt{\pi}}\,{}^*\!\int_{\sqrt{b}}^{1}e^{-(u/b)^2}\frac{du}{1-u}.$$

故P_3在${}^*M$是发散的。所以筛取式（8，48）的右端值并不接近于$q(0)$。

b. 我们陈述一个通用的筛取性质，归结为一个简单定理如下：

（8，50）　若$\varphi(x)=x^2-a^2$，$0<a\in\mathbf{R}$，$q\in\Phi_3$和$\delta(x)=Bf(Bx)$，其中$f(t)$满足(8，43)中的条件，还设

$$\text{st}\left({}^*\!\int_{-a^2}^{-a^2/2}\delta(p)\frac{q(\pm\sqrt{p+a^2})}{\sqrt{p+a^2}}dp\right)$$

$= 0,$

则我们有

$$\mathrm{st}\left(*\int_{-\bullet\infty}^{+\bullet\infty}\delta(\varphi(x))q(x)dx\right)$$

$$=\frac{q(a)+q(-a)}{2}。$$

常见的点 Delta 函数，如 $\delta_1(x,b)$，$\delta_3(x, b)$ 和 $\triangle_1(x, b)$等都满足此定理的条件。

c。我们研究一个特别的例子：

(8, 51) 设 $p(x)=x^{2m}$，$m\in\mathbf{N}$，$q(x)\in \mathbf{C}(\mathbf{R})$且$|q(x)|$有界，我们问筛取积分

$$S=*\int_{-\bullet\infty}^{+\bullet\infty}\delta_1(p(x),b)q(x)dx$$

$$=?$$

我们分情况讨论。

情况 1. $\lim_{x\to 0} q(x)=q(0)\neq 0$。这时令

(8, 52) $$K_{11}=*\int_0^{\bullet\infty}\delta_1(p, b)p^{\frac{1-2m}{2m}}dp/m$$

$$=\frac{1}{2m\sqrt{\pi}}b^{\frac{1-m}{2m}}\Gamma\left(\frac{1}{4m}\right)。$$

我们有

(8, 53) $$\mathrm{st}(S/K_{11})=q(0)。$$

或者设

(8, 54) $\quad \delta_1(p,b)|p|^{\frac{1-2m}{2m}} = 2mK_{11}\delta_{11}(p,b)$

则

(8, 55) $$S = K_{11} * \int_{-*\infty}^{+*\infty} \delta_{11}(p,b) q(|p|^{\frac{1}{2m}} \operatorname{Sgn} p)dp。$$

不难看出：$\delta_{11}(p,b)$是一个点 Delta 函数，它在（$-*\infty$，$+*\infty$）的一个被筛取集合是φ_3。

情况 2．令$q_1(x) = q(x)/(2mx^{2m-1})$，设存在

(8, 56) $$\lim_{x\to 0} q_1(x) = q_1(0),$$

则 $st(S) = q_1(0)$。

d．我们研究另一个例子：

(8, 57) 若 $p(x) = x^{2m}$，$m \in \mathbf{N}$，$q(x) \in C(\mathbf{R})$ 和$|q(x)|$有界，我们问筛取积分

$$S = * \int_{-*\infty}^{+*\infty} \delta_3(p(x),b)q(x)dx = ?$$

情况 1．$\lim_{x\to 0} q(x) \neq 0$。这时令

(8, 58) $$K_{12} = \frac{1}{2m} * \int_{-*\infty}^{+*\infty} \delta_3(p,b) |p|^{\frac{1-2m}{2m}}dp$$

$$=\frac{1}{2m\pi}b^{\frac{1-2n}{4m}}\Gamma\left(\frac{1}{4m}\right)\Gamma\left(\frac{4m-1}{4m}\right),$$

我们有 $st(S/K_{12})=q(0)$。或者设

(8, 59) $$\delta_3(p,b)|p|^{\frac{1}{2m}-\frac{2m}{2m}}=2mK_{12}\delta_{12}(p,b)$$

则 $\delta_{12}(p, b)$ 是一个点 Delta 函数，它在 $(-*\infty, +*\infty)$ 的一个被筛取集合是 φ_3。注意到

(8, 60) $$K_{12}/K_{11}=\Gamma\left(\frac{4m-1}{4m}\right)/\sqrt{\pi}\longrightarrow 1/\sqrt{\pi}\neq 1,$$

当 $m\to\infty$。所以 (8, 54) 与 (8, 59) 是不相同的个体公式。

情况 2. 若 (8, 56) 成立，我们有

$$st(S)=q_1(0)。$$

c. 我们再研究两个特别的例子如下。

(8, 61) 设 $u(x)=1-\sin x$, $q(x)\in C(R)$ 和 $|q(x)|$ 有界，我们问筛取积分

$$S=*\int_{-*\infty}^{+*\infty}\delta(u(x))q(x)dx$$

$$=?$$

其中 $\delta(x)$ 留待下面说明。

解：设 $q\left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\neq 0$，和级数

$$(8,62) \qquad Q(y)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q\left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi+y\right)$$

一致收敛且 $Q(0)\neq 0$ 和 $|Q(y)|$ 有界。

情况 1．若 $\delta(x)=\delta_1(x, b)$。令

$$(8,63) \qquad K_{13}={}^*\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_1(v,b)dv/\sqrt{2|v|-v^2}，近似地$$

$$st(\sqrt{2\pi b}K_{13})=\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

则成立

$$(8,64) \qquad st(S/K_{13})=Q(0)。$$

或者令

$$(8,65) \qquad \delta_1(v,b)/\sqrt{2|v|-v^2}=K_{13}\delta_{13}(v, b),$$

则 δ_{13} 是点 Delta 函数，在区间 $[-2,2]$ 的一个被筛取集合是 $C([-2, 2])$。

情况 2．若 $\delta(x)=\delta_3(x, b)$。令

$$(8, 66) \qquad K_{14}={}^*\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_3(v,b)dv/\sqrt{2|v|-v^2}，近似地$$

$$st(\pi\sqrt{2b}K_{14})=\pi\sqrt{2},$$

则成立

$$(8,67) \qquad st(S/K_{14})=Q(0)。$$

或者令

(8, 68) $\delta_3(v, b)/\sqrt{2|v|-v^2}$
$= K_{14}\delta_{14}(v, b)$,

则 δ_{14} 是点 Delta 函数，在区间 $[-2, 2]$ 的一个被筛取集合是 $C([-2, 2])$。

由于 $st(K_{13}/K_{14}) = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)/\sqrt{2\pi} \neq 1$，所以（8，64）和（8，68）是不同的个体公式。

f. 我们介绍一个常见的共性定理：

(8, 69) 若 $u \in C^\infty(\mathbf{R})$, $n \in \mathbf{N}$, $\{a_i, i_i = 1, \cdots, n\}$ 是 $u(x)$ 的全体零点的集合，$\{b_i, i = 2, \cdots, n\}$ 是 $u'(x)$ 的全体零点的集合且 $u'(a_i) \neq 0$ 对 $i = 1, \cdots, n$ 成立，此外设成立不等式
$-\infty = b_1 < r_1 < a_1 < m_1 < b_2 < r_2 < a_2 < m_2 < b_3 < \cdots < b_n < r_n < a_n < m_n < b_{n+1} = +\infty$,
$u(x)$ 在 $[b_i, b_{i+1}]$ 严格单调，这里 $i = 1, \cdots, n$, $\delta(x)$ 是点 Delta 函数，$q \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ 且 $q(x) \neq 0$ 当且仅当 $x \in (r_i, m_i)$，这里 $i = 1, \cdots, n$，那么对筛取积分

$$S = {}^*\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u(x))q(x)dx$$

成立以下公式

$$st(S) = \sum_{i=1}^{n} q(a_i)/|u'(a_i)|。$$

这个定理的结果很好看，但条件很特别。下面将介绍另一个共性定理，它稍为复杂一点，但较为适用。

g. 另一个共性定理：

(8,70) 若 $f(t)$ 满足（8，43）和 $\delta(x) = Bf(Bx)$，$n \in \mathbf{N}$，$u(x)$ 和 $u'(x) \in C(\mathbf{R})$，$\{a_i, i=1, \cdots, n\}$ 是 $u(x)$ 的全体零点的集合，$\{b_i, i=2, \cdots, n,\}$ 是 $u'(x)$ 的全体零点的集合，$u'(a_i) \neq 0$，对 $i=1, \cdots, n$ 成立，并有下列不等式

$$-\infty = b_1 < a_1 < b_2 < \cdots < b_n < a_n < b_{n+1} = +\infty,$$

$u(x)$ 在 $[b_i, b_{i+1}]$ 严格单调，其中 $i=1, \cdots, n$，则对筛取积分 $S = {}^*\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u(x))q(x)dx$

成立以下公式

$$\mathrm{st}(S)=\sum_{i=1}^{n} q(a_i)/|u'(a_i)|,$$

其中 $q(x)\in C(\mathbf{R})$ 和 $|q(x)|$ 有界；此外要加上如下的附加条件

(8,71) $$\frac{q(u^{-1}(y))}{u'(u^{-1}(y))}\in\Phi_3;$$

或者附加假设存在积分

(8,72) $$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt, \text{ 和}$$

(8,73) $$\frac{q(u^{-1}(y))}{u'(u^{-1}(y))}\in\varphi_3。$$

4．导数 $\delta^{*(n)}(x)$ 的筛取性质。我们有以下共性定理

(8,74) 若点 Delta 函数 $\delta(x)\in{}^*C^{*\infty}({}^*\mathbf{R})$，$t\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{N}$ 和 $q(x)\in C_n(\mathbf{R})$，则我们有

$$\mathrm{st}\left(*\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{*(n)}(x-t)q(x)dx\right)=(-1)^n q^{(n)}(t)。$$

这个结果是众所周知的。

最后我们讨论一下由正交系导出的 Delta 函数，它们与点 Delta 函数不同，但就其筛取性质而言，二者是类似的，所以物理学家统称之为 Delta 函数。

1. 离散谱的情况。

在 M 我们设 $a<b$，$0<\rho(x)\in C((a,b))$，对每个 $n\in N$ 有 $\varphi_n(x)\in C((a,b))$，且满足

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_j^\dagger(x)\varphi_k(x)dx=\delta_{jk}, \quad j,k\in N, \tag{8,75}$$

其中 δ_{jk} 是Kronecker 符号和 $\varphi_j^\dagger(x)$ 是 $\varphi_j(x)$ 的复共轭，则称 $\{\varphi_n(x)\}$ 是 (a,b) 上权 $\rho(x)$ 的正交系，下面的和

$$\delta(k,x,y)={}^*\sum_{n=1}^{k}\varphi_n^\dagger(y)\varphi_n(x), \tag{8,76}$$

$k\in {}^*N$ 称之为 $\{\varphi_n(x)\}$ 的 Delta 和。

我们知道 $C^\infty((a,b))$ 代表 (a,b) 内无穷次可微的函数集，$C_0^\infty((a,b))$ 是 $C^\infty((a,b))$ 的子集，其中每个函数 $q(x)$ 的紧致支撑在 (a,b) 的内部。

我们现在引入定义

(8,77) 若 $\{\varphi_n(x)\}$ 是 (a,b) 上权 $\rho(x)$ 的正交系，$\delta(k,x,y)$ 是 $\{\varphi_n(x)\}$ 的 Delta 和，那么称 $\delta(k,x,y)$ 是 (a,b) 上权 $\rho(x)$ 由 $\{\varphi_n(x)\}$ 导出的 Delta 函数，当且仅当

(1) $st\left({}^*\int_a^b \rho(y)\delta(k,x,y)dy\right)$

$=1$，和

(2) $st\left({}^*\int_a^b \rho(y)\delta(k,x,y)q(y) dy\right) = q(x)$，

对所有的 $x\in(a, b)$ 和 $q\in C$；

$((a, b))$ 和无限大 $k\in {}^*N$ 成立。

由正交系导出的Delta函数有两种形式的理论：（1）共性理论，不必指出正交系和权的个体理论；（2）个性理论，必须指出正交系和权的个体表示。

人们经常关心的问题是：什么是筛取区间和什么是被筛取函数的集合？什么是筛取值？

现在对此举几个例子如下：

例 1. 设筛取区间是 $(-1,1)$，权 $\rho(x)=1$ 和

$$(8,78) \qquad \varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2l}}e^{in\pi x/l}。$$

相应的Delta和通常写为

$$(8,79) \qquad \delta_{15}(k,x,y)=\frac{1}{2}{}^*\sum_{n=-k}^{n=k}e^{-in\pi(y-x)/l}$$

$$=\frac{1}{2l}\frac{\sin\dfrac{(2k+1)(y-x)\pi}{2l}}{\sin\dfrac{(y-x)\pi}{2l}}$$

显然，$\delta_{15}(k,x,y)$ 在 $(-1, 1)$ 上权 $\rho(x)=1$ 是由 (8, 78) 的 $\varphi_n(x)$所导出的 Delta函数，它的一个被筛取集合是 $\psi_{15}=\{q \mid q$在 $(-1,1)$ 连续，平方可积和在 $(-1, 1)$ 的每个闭子集上有界变化。$\}$

例 2. 设筛取区间为 $(-1, 1)$，权 $\rho(x)=1$ 和 Legendre 多项式

$$p_n(x)=\frac{1}{n!2^n}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}。\tag{8,80}$$

相应的 Delta 和为

$$\begin{aligned}\delta_{16}(k,x,y) &= *\sum_{n=0}^{k}\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot p_n(x)p_n(y)\\ &=\frac{1}{2}(k+1)\cdot\frac{p_{k+1}(x)p_k(y)-p_{k+1}(y)p_k(x)}{x-y},\\ & k\in {}^*N。\end{aligned}\tag{8,81}$$

显然 δ_{16} 在 $(-1,1)$ 上权 $\rho(x)=1$ 是由 $p_n(x)$ 导出的 Delta 函数，它的一个被筛取集合是 $\psi_{16}=\{q \mid q$在 $(-1,1)$ 是分片光滑的连续函数并且平方可积$\}$。

例 3. 设筛取区间为 $(-*\infty, +*\infty)$，权 $\rho(x)=e^{-x^2}$ 和Hermite 多项式

(8,82) $$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}。$$

相应的 Delta 和为

(8,83) $$\delta_{17}(k,x,y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}{}^*\sum_{n=0}^{k}\frac{H_n(x)H_n(y)}{n!2^n},\ k\in{}^*N$$

$$=\frac{H_{k+1}(x)H_k(y)-H_{k+1}(y)H_k(x)}{(x-y)2^{k+1}k!\sqrt{\pi}}$$

显然 δ_{17}是$(-*\infty,+*\infty)$上权 $\rho(x)=e^{-x^2}$ 由 $H_n(x)$导出的 Delta 函数，它的一个被筛取集合是 $\psi_{17}=\{q\,|\,q$在 $(-\infty,+\infty)$ 的每个闭子区间上是分片光滑的连续函数并使得积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|e^{-x^2}q^2(x)dx$ 收敛$\}$。

例 4. 设筛取区间为 $(0,+*\infty)$，权 $\rho(x)=x^\alpha e^{-x}$，其中 $\alpha>-1$，和 Laguerre 多项式

(8,84) $$L_n^\alpha(x)=\frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\{e^{-x}x^{n+\alpha}\}。$$

相应的 Delta 和为

(8,85) $$\delta_{18}(k,x,y)$$

$$=*\sum_{n=0}^{k}\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}L_n^\alpha(x)\alpha_n(y)$$

$$(k+1)!\{L^{\alpha}_{k+1}(y)L^{\alpha}_{k}(x)-$$

$$=\frac{-L^{\alpha}_{k}(y)L^{\alpha}_{k+1}(x)\}}{(x-y)\Gamma(k+\alpha+1)}$$

显然 δ_{13} 在（0，+ * ∞）上权 $\rho(x)=e^{-x}x^{\alpha}$ 是由 $L^{\alpha}_{k}(x)$ 导出的 Delta，函数，它的一个被筛取集合是 $\psi_{13}=\{q\,|\,q$ 对所有的 $0<a\in\mathbf{R}$ 在（0，a）是分片光滑连续函数，并且 $\int_{0}^{\infty}e^{-y/2}\,y^{\alpha/2-\frac{1}{4}}$ $|q(y)|\,dy$ 收敛$\}$。

2。连续谱的情况。

a。（－∞，＋∞）上的连续谱。

设 $0<\rho(x)\in ft(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 是连续函数，$\varphi\in ft(\mathbf{R}\times\mathbf{R},\mathbf{C})$，$\mathbf{C}$ 代表复数域，$\varphi(z,x)$ 是二元连续函数，其中 $x\in\mathbf{R}$ 是连续变量，$z\in\mathbf{R}$ 是连续谱。假设有积分

(8，86) $\triangle(z,w,b)={*}\int_{-b}^{b}\rho(x)\varphi^{\dagger}(z,x)\cdot\varphi(w,x)dx$

(8，87) $\delta(x,y,b)={*}\int_{-b}^{b}\varphi(z,x)\varphi^{\dagger}(z,y)dz$

其中 $0<b\in{*}\mathbf{R}$，$\varphi^{\dagger}$ 是 φ 的复共轭，称 $\triangle(z,w,b)$ 为 $\varphi(z,x)$ 的谱 Delta 和，称 $\delta(x,y,b)$ 为变量 Delta 和，$\rho(x)$ 是权。

进而称 $\triangle(z,w,b)$ 是由 $\varphi(z,x)$ 导出的权 $\rho(x)$ 的谱 Delta 函数，当且仅当

(8,88) (1) $\mathrm{st}\left(* \int_{-*\infty}^{+*\infty} \triangle(z,w,B)\,dw \right) = 1$，和

(2) $\mathrm{st}\left(* \int_{-*\infty}^{+*\infty} \triangle(z,w,B)\,q(w)\,dw \right)$

$= q(z)$

对全体 $z \in \mathbf{R}$，$q \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ 和正无限大 $B \in {}^*\mathbf{R}$ 成立。

当$\triangle(z,w,b)$是谱 Delta 函数时称$\varphi(z,x)$是正交连续系。

又称$\delta(x,y,b)$是由$\varphi(z,x)$导出的权$\rho(x)$的变量 Delta 函数，当且仅当

(8,89) (1) $\mathrm{st}\left(* \int_{-*\infty}^{+*\infty} \rho(y)\,\delta(x,y,B)\,dy \right)$

$= 1$，和

(2) $\mathrm{st}\left(* \int_{-*\infty}^{+*\infty} \rho(y)\,\delta(x,y,B)\,q(y)\,dy \right)$

$= q(x)$

对全体 $x \in \mathbf{R}$，$q \in C_0^\infty(\mathbf{R})$和正无限大$B \in {}^*\mathbf{R}$ 成立。

当 $\delta(x,y,B)$是变量 Delta 函数时称 $\varphi(z,x)$是完备连续系。

现在举一个例子如下：

设$\rho(x) = 1, z, x \in \mathbf{R}$和$\varphi(z,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{izx}$，

相应的谱 Delta 函数为

(8,90) $\triangle_{19}(z,w,B)$

$$= {}^*\int_{-B}^{B}\varphi^+(z,x)\varphi(w,x)dx$$

$$=\frac{\sin B(w-z)}{\pi(w-z)}=\triangle_1(w-z,B)$$

和变量 Delta 函数为

(8,91) $\delta_{19}(x,y,B)=\triangle_1(x-y,B)$。

b. $(0,+\infty)$上的连续谱。

设 $0<\rho(x)\in C((0,+\infty))$，$\varphi(z,x)$ 是二元连续函数，其中 $z\in(0,+\infty)$ 是连续谱，$x\in(0,+\infty)$是连续变量。

假设有积分

(8,92) $$\triangle(z,w,b)={}^*\int_0^b\rho(x)\varphi^\dagger(z,x)\varphi(w,x)dx$$

(8,93) $$\delta(x,y,b)={}^*\int_0^b\varphi(z,x)\varphi^\dagger(z,y)dz$$

其中 $0<b\in{}^*\mathbf{R}$，$\varphi^\dagger$是 φ 的复共轭，$\triangle(z,w,b)$ 称为 $\varphi(z,x)$权 $\rho(x)$ 的谱 Delta 和，$\delta(x,y,b)$ 为变量的 Delta 和。

进一步称谱 Delta 和为谱 Delta 函数，当且仅当

(8,94) (1) $st\left({}^*\int_0^{+\infty}\triangle(z,w,B)dw\right)=1$，和

$$(2)\quad st\left(* \int_0^{+\infty} \triangle(z,w,B)\, q(w)\, dw \right) = q(z)$$

对所有 $z \in (0, +\infty)$，$q \in C_0^{\infty}((0, +\infty))$ 和无限大 $B \in {}^*\mathbf{R}$ 成立。

当 $\triangle(z,w,b)$ 为谱Delta函数时称 $\varphi(z,x)$ 是正交连续系。

又称 $\delta(x,y,b)$ 为 $\varphi(z,x)$ 在 $(0, +\infty)$ 权 $\rho(x)$ 的变量Delta函数，当且仅当

$$(8,95)\quad (1)\quad st\left(* \int_0^{+\infty} \rho(y)\delta(x,y,B)\, dy \right) = 1, \text{ 和}$$

$$(2)\quad st\left(* \int_0^{+\infty} \rho(y)\delta(x,y,B)\, q(y)\, dy \right) = q(x)$$

对所有 $x \in (0, +\infty)$，$q \in C_0^{\infty}((0, +\infty))$ 和正无限大 $B \in {}^*\mathbf{R}$ 成立。当 $\delta(x,y,b)$ 是变量Delta函数时称 $\varphi(z,x)$ 是完备连续系。

例 对 $z, x \in (0, +\infty)$ 设 $\rho(x) = 1$ 和

$$(8,96)\quad \varphi(z,x) = (zx)^{\frac{1}{2}} J_{\mu}(zx)$$

其中 J_{μ} 是Bessel函数。相应(8,96)的 $\varphi(z,x)$ 的Delta和为

$$(8,97)\quad \triangle_{2s}(z,w,b) = \sqrt{zw} * \int_0^b x J_{\mu}(zx)$$

$J_\mu(wx)dx$，和

(8,98) $\delta_{20}(x,y,b)=\sqrt{xy}*\int_0^b zJ_\mu(zx)J_\mu(zy)dz$,

它们分别是谱和变量Delta函数，ψ_{20}和Ψ_{20}是它们的两个被筛取集合，其中$\psi_{20}=\{q\,|\,q$在$(0,+\infty)$绝对可积而且在$(0,+\infty)$的每个闭子区间上连续和有界变化$\}$和$\Psi_{20}=\{q\,|\,q\in C((0,+\infty))$，在$(0,+\infty)$的每个闭子区间上有界变化和$|q(x)|$有界$\}$。

特别当$q_0(x)=1\in\Psi_{20}$，我们有

(8,99) $st\left(*\int_0^{+\infty}\delta_{20}(x,y,B)dy\right)=1$,

而与x无关。虽然Hankel变换

(8,100) $\int_0^\infty\sqrt{xy}\,J_\mu(xy)q_0(y)dy$

不收敛。读者如果有兴趣，请研究一下

(8,101) $U_2\lim_{k\to+\infty}\delta_{20}(x,y,k)=\delta_{20}(x,y,+\infty)=?$

这就是作者综合前人结果，重新构成的Delta函数理论，它能较好和较全面地与物理学取得一致。当然这个理论还是很初步的。

9

奇异积分的新概念



任何一种 Delta 函数理论，如果不同时提供一个奇异函数及其积分的理论，这种 Delta 函数理论就是一种不完整的和不能行之久远的理论。Schwarz 的广义函数论就注意到了这个问题，这正是他的优点。另外，各种奇异性问题涉及物质的基本结构，也是物理学中的根本问题，不能不引起人们的注意。根据数学和物理两方面的迫切要求，必须对奇异函数及其积分提供新的系统的看法。

如果只涉及无界函数，我们可以在 $\mathbf{U}_2$ 里讨论，如 $*\int_{0_+}^{1}\frac{1}{x}dx=\ln 1-\ln 0_+=+\infty$ 等。可

现涉及的完全是另一类性质的问题，它源于函数定义有不完全之处，需要补充定义，然后积分。实质讨论的是定义不完全函数及其积分。

在此，首先要讲清问题的背景。

1. 数学上的启发。

如果

$$(9,1)\qquad f(x)=\begin{cases}1, & -2\leqslant x\leqslant -1,\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

当 $-1<x<1$，$f(x)$ 无定义。我们问

$$(9,2)\qquad \int_{-2}^{2} f(x)dx=?$$

为了回答此问题，必须补充定义。例如，令

$$(9,3)\qquad g_1(x,\lambda)=\begin{cases}1, & -2\leqslant x\leqslant -1,\\ \lambda x^2+1-\lambda, & -1<x<1,\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

容易看出

$$(9,4)\qquad \int_{-2}^{2} g_1(x,\lambda)dx=\frac{4(3-\lambda)}{3}。$$

当 λ 变化时，积分(9,4)可取到 $\mathbf{R}$ 中的任意值。如果把 (9,4) 的每个值看成(9,2)的可能解，则(9,2)可取到 $\mathbf{R}$ 的每个数。此外，若

$$(9,5)\qquad g_2(x)=\begin{cases}1, & -2\leqslant x\leqslant -1,\\ 1/|x|, & -1<x<1,\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

于是(9,6) $\int_{-2}^{2} g_2(x)dx$

是奇异积分，我们也不能排除它作为(9,2)的解。

因此在 M 我们可以定义：若 $a<b$，非空 $q\subset[a,b]$ 和 $f\in ft([a,b]\backslash q,\mathbf{R})$，则称 g 是 f 在[a,b]的延拓，当且仅当 $g\in ft([a,b],\mathbf{R})$ 和 $g(x)=f(x)$ 对所有 $x\in[a,b]\backslash q$ 成立。进一步称 $\int_a^b g(x)dx$ 是 $\int_a^b f(x)dx$ 的一个解，如果 $g(x)$ 在[a,b]可积。

2。物理背景。

奇异函数及其积分在物理上也是源远流长的。

(1) Newton 万有引力定律是用奇异函数表示的。以 S 代表太阳，其质量为 M，P 是太阳附近的点，其质量 $m=1$，以 $\vec{r}(x,y,z)$ 代表从 S 到 P 的向量，(x,y,z) 是 P 的坐标，原点即为 S。则 P 点所受的引力为

(9,7) $\vec{F}=-C\vec{r}/r^3$,

其中常数 $C=KM$，K 为引力常数。$\vec{F}$ 的位势为

(9,8) $u(r)=C/r$,

满足 $\nabla u=\vec{F}$。

注意，函数 u 和 $\vec{F}$ 在 $r=0$ 无定义。实际上，太阳的引力场在 $r=0$ 是有意义的。因此，公式(9,7)和(9,8)有其实用范围，特别在 $r=0$ 附近是不适用的。在这里，这些公式应该从理论上和实验上进行修正。

由于 Robinson 使无限小合法化，从理论上进行修正又有了新的可能。

由于物理学的本性和 Newton 引力论的影响，类似于(9,7)和(9,8)，Coulomb 引入了电场，和量子力学的各种场，他们在粒子的中心 $r_i=a_i$，$i=1,\cdots,n$ 常常是奇异函数。

在 **M** 中看来，$u(r)=C/r$，在 $r=0$ 是奇异的，即 $u(r)$ 在 $r=0$ 没有定义。然而，**R** 的点 $r=0$ 在 $\mathbf{U}_2$ 扩大为 $[0_-,0_+]$。显然，奇异函数是定义不完全函数的特殊情况。例如，$u(r)$ 在 $[0,0_+]$ 没有定义。

为了讨论和奇异函数（如 $u(r)=C/r$）有关的问题，一条可行的道路是在 $^*\mathbf{M}$ 找一个正则函数，如

(9,9) $$U(r)=C\Phi(Br)/r,$$

其中

(9,10) $$\Phi(Br)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}*\int_0^{Br}e^{-t^2}dt,$$

其中 $B\in {}^*\mathbf{R}$ 是正无限大，使得当 r 不是无限小时 U(r) 和 u(r) 的差是无限小。如果以 U(r)取代u(r)，则我们把M 中与u(r)有关的奇异问题化为 $\mathbf{M}_2$ 中与 U(r)有关的正则问题。或者，更正确地，我们应该说，我们所讨论的，本来是 $\mathbf{M}_2$ 中与U(r) 有关的正则问题，只是由于历史的或认识上的原因，它们被放在M 中讨论，由于 **R** 的表示能力的限制，被表示为与u(r)有关的奇异问题。在 **M** 中看来，这些问题很困难。为了解决这类奇异问题，最好的办法是回到 $\mathbf{M}_2$，找到这个奇异函数（如u(r))的本源(如U(r))，再讨论与U(r) 有关的正则问题。

我们必须注意，相应于 **M** 中的奇异函数 u(r)，在 $\mathbf{M}_2$ 中有无限多个函数可以成为它的本源。例如，从纯数学上讲，不同于U(r)，下面的函数

(9,11) $$U_1(r)=\begin{cases}C/r, & b\leqslant r,\\ 0, & 0\leqslant r<b\end{cases}$$

和

(9,12) $$U_2(r)=Cr/(r^2+b^2)$$

当 b 是无限小正数时，都可能是u(r) 的本源。最重要的是对每个具体问题中的奇异函数

找出其合适的本源。这要根据实际的或实验的资料。

有一个美丽的神话叫“女娲补天”，说的是天有漏洞，女娲烧五色石头以填补之。所提及的有关奇异函数的问题与这个神话很类似。在奇异函数的定义域中有漏洞。例如，(9,8)中的u(r)，描写了宇宙中的基本规律——万有引力定律，在它的定义域中有一个漏洞，这与天有漏洞十分相像。类似的漏洞在物理学的各种场论中经常碰到。如何填补这些漏洞，真有点像女娲补天。在我们面前摆着很多漏洞。我们应当将它们逐渐补上，但很不容易。

(2) 量子力学中的一个例子。在[52]中Bjorken和Drell写了这样一个例子：“我们发现

$$\langle(\delta r)^2\rangle = \frac{e^2}{2\pi^2 m^2}\int f(\omega)d\omega$$

$$= \frac{e^2}{2\pi^2 m^2}\int \frac{d\omega}{\omega} \qquad (4,18)$$

其中频率积分限从0到∞。由于我们对电子的近似处理是粗糙的，积分在上、下限都发散。对定域于氢原子中的电子的准确的相对性处理，情况就不这样，大于Bohr半径～$(Z\alpha m)^{-1}$的那些波长将无效，因此必然有一个

相应于此典型原子大小的最小感生振荡频率；因此，$\omega_{min}\sim mZ\alpha$。还有一个在距离～电子Compton 波长 1/m 处的高频截止，它来自电子的相对性结构。这个结构相应于颤振振幅，它说明频率高于 $\omega_{max}\sim\omega$ 时将不能有效地晃动电子。因此，我们近似取 $\int d\omega/\omega\sim\ln(1/Z\alpha)$，并由（4,18）求得在真空场中振荡的均方振幅是

$$\langle(\delta r)^2\rangle=\left(\frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{1}{Z\alpha}\right)\left(\frac{1}{m}\right)^2. ”$$

最初，被积函数 $f(\omega)=1/\omega$ 是奇异函数，即当 ω 在 $\omega=0$ 附近，以及 ω 在 $+\infty$ 附近是定义不完全的函数。然后考虑到物理实验资料，$f(\omega)$ 被补充为

$$(9,13)\qquad f(\omega)=\begin{cases}0, & m<\omega,\\ 1/\omega & mZ\alpha\leqslant\omega\leqslant m,\\ 0, & \omega<mZ\alpha.\end{cases}$$

事实上，物理学家早就自发地在各个不同领域内在填补这些漏洞了。

3．在 M_2 中对奇异函数及其积分的处理方法。

为了说明我们的目的，我们先讨论下面的积分

$$(9,14)\qquad i(\lambda)=\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi(t,\lambda)dt,$$

其中 $\varphi(t,\lambda)=t^\lambda$。当 $\lambda\geqslant 0$，积分不奇异，成立

$$(9,15)\qquad i(\lambda)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1}/(\lambda+1)。$$

利用解析开拓，当 $\lambda\neq -1$，我们有

$$(9,16)\qquad i(\lambda)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1}/(\lambda+1)。$$

特别当 $\lambda=-3/2$，我们有

$$(9,17)\qquad i(-3/2)=\int_0^{\frac{1}{2}}t^{-3/2}dt=-2\sqrt{2}.$$

这样由解析开拓法对奇异积分 $i(-3/2)$ 得到实数解。

另一方面，用极限方法得到

$$(9,18)\qquad i(-3/2)=\int_0^{\frac{1}{2}}t^{-3/2}dt=\lim_{s\to 0+}\int_s^{\frac{1}{2}}t^{-3/2}dt$$

$$=\lim_{s\to 0_+}2(-\sqrt{2}+s^{-\frac{1}{2}})=+\infty.$$

因为 $-2\sqrt{2}\neq+\infty$ 而出现矛盾。(9,17)与(9,18)这两个解到底哪一个是正确的，这在 $\mathbf{M}$ 中很难解决，真是进退维谷。在 $\mathbf{M}_2$ 中处理这个问题比较方便，有两条大的方向，即同空间补充和高维补充。

(1)同空间补充，即空间的维数不扩大，

进行补充定义，来处理奇异函数及有关的积分问题。对于一维的情形，我们可以在 $\mathbf{M}_2$ 引入以下定义。若 $a<b\in\mathbf{R}$，$q\subset[a,b]$ 和 $f\in ft([a,b]\cap q,\mathbf{R})$，则称 g 是 f 的 $^*\mathbf{M}$近似延拓，当且仅当 $g\in {}^*ft([a,b],{}^*\mathbf{C})$ 和当 $x\in[a,b]\cap q$ 且 $y\in mon({}^*x)$ 时 $g(y)-{}^*f(y)$ 是无限小。此时，若 g 在 $[a,b]$ 是 $^*\mathbf{M}$ 可积，则称 $*\int_a^b g(x)dx$ 是 $\int_a^b f(x)dx$ 的 $^*\mathbf{M}$ 近似解，特别，若 $*\int_a^b g(x)dx$ 是有限的，则称 $st\left(*\int_a^b g(x)dx\right)$ 是 $\int_a^b f(x)dx$ 的一个标准解。

由此定义，若 f 在有限区间 $[a,b]$ 可积，则成立 $st\left(*\int_a^b g(x)dx\right)=\int_a^b f(x)dx$。

现在按此定义来讨论(9,14)的积分 $i(\lambda)$，令

$$(9,19)\qquad g_1(t,\lambda)=\begin{cases} t^\lambda, & b\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\\ s[b^\lambda+K(t-b)], & 0\leqslant t<b,\end{cases}$$

其中无限小正数 $b\in{}^*\mathbf{R}$，$0\leqslant s\leqslant 1$ 和 $K\in{}^*\mathbf{R}$ 是任意的。则 $g_1(t,\lambda)$ 是 t^λ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 的 $^*\mathbf{M}$

近似延拓。当$s=1$，设

$$(9,20)\qquad I_1(\lambda)=*\int_0^{\frac{1}{2}}g_1(t,\lambda)dt$$

$$=\lambda b^{\lambda+1}/(\lambda+1)+\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1}/(\lambda+1)$$

$$-Kb^2/2,$$

当$K=2\lambda b^{\lambda-1}/(\lambda+1)$，有$I_1(\lambda)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\lambda+1}/(\lambda+1)$，这与(9,17)，(9,16)一致。另外，当$s=0$，设

$$(9,21)\qquad I_0(\lambda)=*\int_{0+}^{\frac{1}{2}}g_1(t,\lambda)\phi t=+\infty,\ \text{当}$$

$$\lambda=-3/2,$$

这与(9,18)一致。

这样，在我们的理论中(9,17)和(9,18)都是合法的，并不引起矛盾。

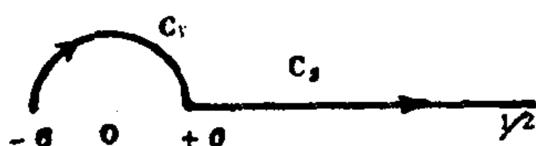
请注意，(9,13)是同空间补充的物理实例。

(2) 高维补充。这是非常灵活的，与其引进一般的定义，还不如作出实例。

例1. 化一维奇异积分为复平面线积分。如欲求奇异积分

$$(9,22)\qquad I(-3/2)=\int_0^{\frac{1}{2}}x^{-3/2}dx,$$

我们可令 $z=x+iy$，在复平面上把积分路径选为 $C=C_1+C_2$，请看(9,23)图。



在(9,23)图中，正无限小 $\sigma\in{}^*R$，C_1 从 $-\sigma$ 到 σ 是以 0 为中心的以 σ 为半径的顺时针的半圆，C_2 从 σ 到 $\frac{1}{2}$ 为直线段。我们把奇异积分 $I(-3/2)$ 补充定义为

$$(9,24)\qquad I(-3/2)=R_e\left\{\int_c z^{-3/2}\,dz\right\}$$

$$=R_e\left\{\int_{c_1} z^{-3/2}dz+\int_{c_2} z^{-3/2}\,dz\right\}$$

$$=R_e\left\{2(-\sigma)^{-\frac{1}{2}}-2\sqrt{2}\right\}=-2\sqrt{2}.$$

这结果与(9,17)一致。如果不取实部，则

$$(9,25)\qquad I(-3/2)=-2\sqrt{2}-2\,i\sigma^{-\frac{1}{2}}$$

这就与(9,17)差一无限大虚部。

例2. 我们研究奇异积分

$$(9,26)\qquad J=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\,dx,$$

同上令 $z=x+iy$，在复平面上把积分路径选为 $C=C_1+C_2+C_3$。请看下页(9,27)图。

在 (9,27) 图中，C_1 从 -1 到 $-\sigma$ 为直线段，C_2



从 $-\sigma$ 到 σ 是以 0 为中心的以 σ 为半径的反时针的半圆，C_3从 σ 到 1 为直线段。我们把奇异积分 J 补充定义为

$$(9,28)\qquad J=\int_c \frac{1}{Z}dz=\int_{c_2}\frac{1}{Z}dz=\pi i。$$

这是众所周知的一个结果。如果补充定义为

$$(9,29)\qquad J=R_e\left\{\int_c \frac{1}{z}dz\right\}=0,$$

这与 Cauchy 主值相同。

以上两个例子是从数学上把直线上的奇异函数在复平面上加以正则化。在物理学中的例子更加复杂一些。

例 3. 取代（9，8），以 $\Phi=-GM/r$ 记引力场，在古典理论中 $r=0$ 是三维奇点。按 Einstein 广义相对论，取 Schwarzchild 度量

$$(9,30)\qquad ds^2=\frac{dr^2}{1-(2GM/c^2r)}+ \\ +r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)- \\ -\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt。$$

称 $r_s=2GM/c^2$ 为 Schwarzchild 半径，则在

四维空时系统中，$r=r_s$是有名的Schwarzchild奇性区。对太阳而言，$r_s=1.5$公里，对地球而言，$r_s=0.44$公分。一个光子在$t=0$由$r>r_s$的地方向$r=0$运动。在光子达到$r=0$之前，必先达到$r=r_s$的地方，而这需要的时间已经是$t=\infty$。这就是Schwarzchild奇性。

这是物理中用四维奇性补充三维奇性的例子，是由物理学的本性决定的。

在物理学中，特别在量子力学中有些积分在数学上是发散的，但在物理上却取一定的常数值，引起理解上的困难。作者根据物理学和数学自发的演变趋向，明确提出定义不完全函数的积分的概念，以消除这种理解上的困难。同时提出两种补充定义的方法，即同空间补充和高维空间中补充，以克服这种奇异性所引起的麻烦。这种思想能否取得成功，还有待于进一步的检验。也许是一件跨世纪的任务，美好的前景正在等待我们。

刚刚去世的著名物理学家Dirac生前希望物理中发散积分的困难能得到解决，作者从数学上给出解决这个问题的无限种可能性，其中是否包含有物理上所需要的解，这就是下一步

的研究任务了。

4. $\delta(x)/x=?$

这是大家所关心的问题，这里将在 M_2 中给出近似表达的不同形式。以$^*\sim$表示在$^*M$的近似延拓，我们举几个例子如下。

例 1. 若取 $\delta(x)=\delta_3(x, b)$ 和 $x/(x^2+b^2)^*\sim 1/x$，其中正无限小 $b\in{}^*\mathbf{R}$. 于是我们有

$$(9,31)\qquad \delta(x)/x^*\sim\delta_3(x, b)x/(x^2+b^2)$$
$$=\frac{b}{\pi(x^2+b^2)}\cdot\frac{x}{x^2+b^2}$$
$$=-\frac{1}{2}\delta_3'(x,b)=-\frac{1}{2}\delta'(x)。$$

于是 $-\frac{1}{2}\delta'(x)$ 是 $\delta(x)/x$ 的一种$^*M$近似。

例 2. 若取 $\delta(x)=\delta_4(x, b)$ 和 $x/(x^2+b^2)^*\sim 1/x$，则我们有

$$(9,35)\qquad \delta(x)/x^*\sim\delta_4(x, b)x/(x^2+b^2)$$
$$=\frac{b^2}{2(x^2+b^2)^{3/2}}\cdot\frac{x}{x^2+b^2}$$
$$=-\frac{1}{3}\delta_4'(x, b)$$
$$=-\frac{1}{3}\delta'(x).$$

于是 $-\frac{1}{3}\delta'(x)$ 也是 $\delta(x)/x$ 的一种$^*M$ 近似。

总之，不必再举例了，近似的可能性是无限地多。

5。对于奇异积分的*M 近似解的多种可能：关于这一点我们必须再深入展示一下。以（9，26）的积分 J 为例。如果我们以 $g_1(x)^* \sim 1/x$，这里

$$(9,36) \qquad g_1(x) = \frac{2}{|x|\sqrt{\pi}} * \int_0^{Bx} e^{-t^2} dt,$$

其中 $B \in {}^*R$ 为正无限大，则由于 $g_1(x)$ 是奇函数，则 J 的一种*M 近似解为 0。

另一种情况，取 $1/(x+ib)^* \sim 1/x$，其中 $b \in {}^*R$ 是正无限小。这时，J 的*M 近似解为

$$(9,37) \qquad st\left(* \int_{-1}^{1} \frac{1}{x+ib} dx\right)$$

$$= st\left\{* \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+b^2} dx - i * \int_{-1}^{1} \frac{b}{x^2+b^2} dx\right\}$$

$$= -i\pi st\left(* \int_{-1}^{1} \delta_3(x, b) dx\right)$$

$$= -i\pi。$$

即 $-i\pi$ 也可以成为 J 的*M 近似解。

一般地，若取 $g_3(x)^* \sim 1/x$，其中

$$(9,38) \qquad g_3(x) = g_1(x) + c_0\delta_1(x) +$$

$$+c_1\delta_1'(x)+\cdots+c_n\delta_1^{(n)}(x),$$

$n\in N$ 和 c_0, c_1, …, c_n 是 $*\mathbf{C}$ 中的常数。则 $*\mathbf{C}$ 中的任意一个数都可成为 J 的解。

6. 单位阶梯函数的 Fourier 变换：

这也是令人头痛的基本问题，今在 M_2 作出如下解释。单位阶梯函数的表示为

$$(9,39)\qquad \theta(t)=\begin{cases}1, & 0<t<\infty,\\ 0, & -\infty<t<0,\end{cases}$$

和 $\theta(0)=\frac{1}{2}$。它的 Fourier 变换是

$$(9,40)\qquad \Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-i\omega t}dt。$$

由于这个积分发散，所以在标准分析中 $\Phi(\omega)$ 失去意义。我们现在在 M_2 中求解。首先取 $g_1(t)^*\sim\theta(t)$，这里

$$(9,41)\qquad g_1(t)=\begin{cases}0, & -{}^*\infty<t<0,\\ 1, & 0<t\leqslant B,\\ 0, & B<t<{}^*\infty,\end{cases}$$

$B\in{}^*\mathbf{R}$ 是正无限大，

和 $g_1(0)=\frac{1}{2}$。于是得到 $\Phi(\omega)$ 的 $^*M$ 近似解为

$$(9,42)\qquad F_1(\omega)=*\int_{-*\infty}^{+*\infty}g_1(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= {}^*\int_0^B e^{-i\omega t}dt$$

$$= \pi\Delta_1(\omega, B) + i\frac{\cos B\omega - 1}{\omega},$$

这里 $\Delta_1(\omega, B) = \sin B\omega/(\pi\omega)$ 是已知 的 Delta 函数。

如果以 $g_2(t)^* \sim \theta(t)$，这里

$$(9,43) \qquad g_2(t) = \begin{cases} e^{-t/B}, & 0<t<{}^*\infty, \\ & B \in {}^*\mathbf{R} \text{ 是正无限大}, \\ 0, & -{}^*\infty<t<0, \\ g_2(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

于是得到 $\Phi(\omega)$ 的另一个近似解为

$$(9,44) \qquad F_2(\omega) = {}^*\int_{-{}^*\infty}^{+{}^*\infty} g_2(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= {}^*\int_0^{{}^*\infty} e^{-(\frac{1}{B}+i\omega)t}dt$$

$$= \pi\delta_3\left(\omega, \frac{1}{B}\right) + i\frac{\omega}{b^2+\omega^2}, \quad b = \frac{1}{B},$$

其中 δ_3 是已知的 Delta 函数。

原来，单位阶梯函数 $\theta(t)$ 的 Fourier 变换 (9，40) 是没有确定数学意义的，但它的 ${}^*\mathbf{M}$ 近似 (9，42) 和 (9，44) 是有意义的。

怎么表示数学物理方程的基本解，是举世瞩目的基本问题。在 $\mathbf{M}_2$ 中解决这些问题比较

方便，今举几个重要情况如下。

7. 常系数线性常微分方程的基本解：

我们研究

$$(9,45)\qquad p\left(\frac{d}{dx}\right)y(x)=f(x),$$

$$-\infty<x<+\infty,$$

这里 $p(v)$ 是多项式

$$(9,46)\qquad p(v)=\prod_{s=1}^{r}(v-a_s)^{k_s},$$

$a_s\in \mathbf{C}$ 是不同的常数，$k_s\geqslant 1$，$s=1,\cdots,r$ 和 $n=k_1+\cdots+k_r$。为了解（9,45），我们在 $\mathbf{M}_2$ 研究

$$(9,47)\qquad p\left(\frac{d}{dx}\right)G(x,y,B)=\delta_{19}(x,y,B)$$

$$=\frac{1}{2\pi}{}^*\int_{-B}^{B}e^{i(x-y)z}dz,$$

$B\in {}^*\mathbf{R}$ 是正无限大。

不难看出

$$(9,43)\qquad G(x,\ y,\ B)$$

$$=\frac{1}{2\pi}{}^*\int_{-B}^{B}\frac{e^{-iyz}}{p(iz)}\Big\{e^{ixz}$$

$$-\sum_{s=1}^{r}D_s(iz)e^{a_sx}\sum_{j=0}^{k_s-1}A_{sj}(iz)$$

$$[x(iz-a_s)]^j\Big\}dz,$$

其中

(9,49) $\quad p(iz)=(iz-a_s)^{k_s}D_s(iz)$

(9,50)
$$\frac{e^{x(iz-a_s)}}{D_s(iz)}$$
$$=\sum_{j=0}^{k_s-1} A_{s_j}(iz)[x(iz-a_s)]^j$$
$$+O((iz-a_s)^{k_s})。$$

最后令

(9,51)
$$g(x,B)$$
$$={}^*\int_{-*\infty}^{+*\infty} G(x,y,B)f(y)dy,$$

得（9，45）的解为

(9,52) $\quad y(x)=st(g(x,\ B))。$

8．抛物型偏微分方程的基本解：

我们研究非齐次抛物型方程

(9,53) $\quad \partial u/\partial t-\Delta u=f(t,\ x),$

其中 $x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)$，$\Delta=\partial^2/\partial x_1^2+\cdots+\partial^2/\partial x_n^2$，$n\in N$，设 $f(t,\ x)$ 是连续，有界变化和具紧致支撑的函数。为了求解(9，53)，我们研究*M 的问题

(9,54)
$$(\partial/\partial t-\Delta)G(t,s,x,y,B)$$
$$=\delta_{1s,n+1}(t,s,x,y,B),$$

其中

$$(9,55)\quad \delta_{10,n+1} = (2\pi)^{-n-1} * \iint_{|r|,\ |z_j| \leqslant B,\ j=1,\ \cdots,\ n,} e^{i(t-s)r + i\langle x-y \mid z\rangle} drdz$$

其中 $B \in {}^*\mathbf{R}$ 是正无限大，$\langle x-y \mid z\rangle$ 代表 $x-y$ 和 z 的内积。不难看出（9，55）的解为

$$(9,56)\quad G(t,s,x,y,B) = (2\pi)^{-n-1} * \iint_{|r|,\ |z_j| \leqslant B,\ j=1,\cdots,n。} \frac{e^{-isr - i\langle y \mid z\rangle}}{ir - |z|^2}\{e^{itr + i\langle x \mid z\rangle} - i\langle x \mid z\rangle - 1\} drdz$$

我们现在定义一个函数

$$(9,57)\quad v(t,x,B) = * \iint_{{}^*\mathbf{R}^{n+1}} G(t,s,x,y,B) f(s,y) dsdy$$

其中 $(t,\ x) \in {}^*\mathbf{R}^{n+1}$ 是有限的。不难看出 $v(0,0,B) = 0$ 和

$$(9,58)\quad st[(\partial/\partial t - \Delta)v(t,\ x,\ B)] = f(t,\ x)$$

对 $(t,\ x) \in \mathbf{R}^{n+1}$ 成立。

现在研究导热方程的 Cauchy 问题

$$(9,59)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(t,x), & t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

其中 $f(t, x)$ 足够光滑且 $|f(t,x)|$ 和一阶导数 $|\partial f(t,x)| \leqslant k(t)\exp(a|x|^2)$，这里 $a>0$。我们引入积分

$$(9,60)\quad v(t,x,b) = {}^*\int_0^t {}^*\int_{R^n} \frac{f(s,y)}{\left[4\pi\left(t-s+\frac{b^2}{4}\right)\right]^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4\left(t-s+\frac{b^2}{4}\right)}\right\}dyds$$

其中 $b\in {}^*\mathbf{R}$ 是正无限小。不难看出

$$(9,61)\quad (\partial/\partial t-\Delta)v = f(t,x) + \text{无限小},$$

这里 (t, x) 是有限的。如果令

$$(9,62)\quad u(t, x) = st\{v(t,x,b)\},\quad \text{当 } (t, x)\in \mathbf{R}^{n+1}$$

则 u 满足（9，59）。

进一步求解导热方程的非齐次边界条件的 Cauchy 问题

$$(9,63)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & t>0 \\ u\Big|_{t=0} = f(x), \end{cases}$$

其中 $f(x)$ 足够光滑，且 $|f(x)|$ 和一阶导数 $|\partial f(x)| \leqslant k\exp\{a|x|^2\}$ 对 $a>0$。为了解（9，63）我们研究

$$(9,64)\qquad v(t,x,B)=\frac{1}{\left[4\pi\left(t+\frac{b^2}{4}\right)\right]^{\frac{n}{2}}}$$

$$*\int_{{}^*R^n} f(y)\exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4\left(t+\frac{b^2}{4}\right)}\right\}dy,$$

其中 $b\in {}^*\mathbf{R}$ 是正无限小。当 $(t, x)\in \mathbf{R}^{n+1}$ 我们令

$$(9,65)\qquad u(t,x)=st[v(t,x,b)]$$

$$=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{R^n} f(y)$$

$$\exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\}dy$$

则 u 是 (9, 63) 的解。

9. 现在研究 Schrodinger 方程的基本解:

首先研究非齐次方程的 Cauchy 问题

$$(9,66)\qquad \begin{cases} \dfrac{2m}{hi}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f(t,x), \\ \qquad\qquad t>0,\ x=(x_1,x_2,x_3) \\ u\Big|_{t=0}=0, \end{cases}$$

其中 $f(t, x)$ 连续，当 $|x|$ 有界时对 x 是有界变化的且 $|f(t,x)|\leqslant k(t)$。为了解(9,66)我们令

(9,67) $v(t, x,B)$

$$=\frac{hi}{2m}{}^*\int_0^t {}^*\int_{{}^*R^3} G(t,s,x,y,B)$$

$$f(s,y)dsdy,$$

其中

(9,68) $$G=\left[\frac{m}{2\pi ih\left(t-s+\frac{mb^4}{2h}\right)}\right]^{3/2}$$

$$\exp\left\{\frac{im|x-y|^2}{2h\left(t-s+\frac{mb^4}{2h}\right)}\right\},$$

其中 $b\in {}^*\mathbf{R}$ 是正无限小，$bB=1$。不难看出

(9,69) $$\left(\frac{2m}{hi}\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)v$$

$$={}^*\int_{{}^*R^3} f(t,y)\delta_{24}(x_1-y_1,B)$$

$$\delta_{24}(x_2-y_2,B)\delta_{24}(x_3-y_3,B)dy$$

$$=f(t,x)+\text{无限小},$$

其中 $(t,x)\in {}^*\mathbf{R}^4$ 是有限的和点 Delta 函数

(9,70) $\delta_{24}(p,B)$

$$=B\left(\frac{1}{\pi i}\right)^{1/2}\exp\{iB^2p^2\}。$$

此外还有 $v(0,x,B)=0$。因此，v 是(9, 66)的 ${}^*\mathbf{M}$ 近似解。

我们现在研究齐次 Schrodinger 方程的

下面的 Cauchy 问题

$$(9,71)\quad \begin{cases} \dfrac{2m}{hi}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=0, \\ \qquad\qquad t>0, x=(x_1,x_2,x_3) \\ u\Big|_{t=0}=f(x), \end{cases}$$

其中f(x)连续有界，在有限域上有界变化。问题（9，71）的一个*M近似解为

$$(9,72)\quad v(t,\ x,\ B)$$

$$= {}^*\int_{{}^*R^3} G(t,x,y,B)f(y)dy$$

其中

$$(9,73)\quad G=\left[\frac{m}{2\pi ih\left(t+\dfrac{mb^2}{2h}\right)}\right]^{3/2}$$

$$\exp\left\{\frac{im|x-y|^2}{2h\left(t+\dfrac{mb^2}{2h}\right)}\right\}。$$

不难看出

$$(9,74)\quad \left(\frac{2m}{hi}\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)v=0$$

和

$$(9,75)\quad v(0,\ x,B)$$

$$= {}^*\int_{{}^*R^3} f(y)\delta_{24}(x_1-y_1,B)$$

$$\delta_{24}(x_2-y_2,B)\delta_{24}(x_3-y_3,B)dy$$

$$=f(x)+\text{无限小。}$$

10．我们研究齐次波动方程的 Cauchy 问题：

$$(9,76)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u=0, \\ \qquad\qquad t>0,\ x=(x_1,x_2,x_3) \\ u\Big|_{t=0}=f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=g(x), \end{cases}$$

其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 连续，$|xf(x)|$，$|x\partial f(x)|$，$|xg(x)|$ 和 $|x\partial g(x)|$ 有界，在有限域上有界变化，常数 $a>0$。

我们构造（9，76）的*M近似解如下，令

$$(9,77)\quad v(t,x,B)$$

$$={}^*\int_{{}^*R^3}\frac{f(z)}{4\pi a}G_1(t,x,z,B)\,dz$$

$$+{}^*\int_{{}^*R^3}\frac{g(z)}{4\pi a}G_2(t,x,z,B)dz,$$

其中 $B\in{}^*\mathbf{R}$ 是正无限大和

$$(9,78)\quad G_1=\frac{a}{4\pi^2}{}^*\int_{|y|<B}[e^{i|y|at}+$$

$$+e^{-i|y|at}]e^{i\langle y|x-z\rangle}dy$$

$$(9,79)\quad G_2=\frac{1}{4\pi^2}{}^*\int_{|y|<B}\frac{1}{i|y|}[e^{i|y|at}$$

$$-e^{-i|y|at}]e^{i\langle y|x-z\rangle}dy.$$

不难算出$(\partial/\partial t-\Delta)v=0$和

(9,80) $$v(t,x,B)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}*\int_{*R^3}\frac{f(z)}{|x-z|}[\Delta_1(|x-z|-at,B)-\Delta_1(|x-z|+at,B)]dz+\frac{1}{4\pi a}*\int_{*R^3}\frac{g(z)}{|x-z|}[\Delta_1(|x-z|-at,B)--\Delta_1(|x-z|+at,B)]dz$$

和当$x\in {}^*\mathbf{R}^3$是有限的我们有

(9,81) $$v(0,x,B)=f(x)+\text{无限小},$$

和

(9,82) $$\frac{\partial v}{\partial t}(0,x,B)=g(x)+\text{无限小}。$$

特别当$(t,x)\in\mathbf{R}^4$并使得$0<t<+\infty$，我们有

(9,83) $$st(v(t,x,B))=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{S(x,at)}\frac{f(z)}{at}dS+\frac{1}{4\pi a}\int_{S(x,at)}\frac{g(z)}{at}dS,$$

这里$S(x,r)$代表以x为中心和以r为半径

的球面。这就是众所周知的古典结果。

另外，我们在这里所使用的是个体的点 Delta 函数理论，如公式（9,47），(9,55)，(9,70）和（9,80）等等。

11. Laplace 方程的基本解：

我们研究

$$(9,84)\qquad \Delta u = f(x),\quad x=(x_1,x_2,x_3)。$$

当 f(x) 是连续函数并具紧致支撑，我们令

$$(9,85)\qquad v(x,B) = {}^*\int_{{}^*R^3} f(y)U(|x-y|)dy$$

其中

$$(9,86)\qquad U(r) = -\frac{\Phi(Br)}{4\pi r},$$

这里 Φ 如（9，10）所表示，$B\in {}^*\mathbf{R}$ 是正无限大。令 $bB=1$，我们有

$$(9,87)\qquad \frac{d}{dr}\Phi(Br) = 2\delta_1(x,\ b),$$

并可算出

$$(9,88)\qquad st(\Delta v(x,B)) = f(x)。$$

另一种情况，若进一步设f(x)的一阶导数连续，我们令

$$(9,89)\qquad h(x,\sigma)$$

$$= {}^*\int_{{}^*R^3} f(y)H(|x-y|)dy,$$

其中

$$(9,90)\qquad H(r)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4\pi r}, & \sigma\leqslant r<*\infty\\ 0, & 0\leqslant r<\sigma\end{cases}$$

$\sigma\in{}^*\mathbf{R}$ 为正无限小。我们可算出

$$(9,91)\qquad st(h(x,\sigma))=f(x)。$$

由此看 $v(x,B)$ 和 $h(x,\sigma)$ 都是（9，84）的 $^*M$ 近似解。但在 $^*M$ 中看来，核 $U(r)$ 是解析的，所以对 $f(x)$ 的要求必较弱，只要 $f(x)$ 连续。而 $H(r)$ 则是个间断函数，所以对 $f(x)$ 的要求较强，仅仅要求 $f(x)$ 是连续的显然是不够的。奇怪的是：在标准分析中所采取的核实际上是 $H(r)$，而且似乎认为这是天经地义的。但 $H(r)$ 是一个性质很坏的函数。现在我们当然可以选择象 $U(r)$ 这类好函数作为积分核。

12．一般椭圆型微分方程的基本解：

我们现在研究常系数椭圆型微分方程

$$(9,92)\qquad L(\partial)u=\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{m}A_{i_1\cdots i_m}\cdot\frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}=f(x)$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$m>0$ 为偶数，$A_{i_1\cdots i_m}$

为常数，$n\geqslant 2$ 并设

$$(9,93)\qquad L(y)\geqslant\lambda\left[\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right]^{\frac{m}{2}},$$

$$\lambda>0,\quad y=(y_1,\ \cdots,\ y_n)$$

这里

$$(9,94)\qquad L(y)=\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{m} A_{i_1\cdots i_m}y_{i_1}\cdots y_{i_m}。$$

在***M** 中我们引进积分核

$$(9,95)\qquad K(x)=i^m/(2\pi)^n$$

$$*\int\cdots\int_{\substack{|y_j|\leqslant B\\ j=1,\cdots,n}}\frac{e^{i\langle x|y\rangle}-\sum\limits_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}[i\langle x|y\rangle]^k}{L(y)}$$

$$\times dy_1\cdots dy_n$$

其中 $B\in{}^*\mathbf{R}$ 为正无限大。进一步定义

$$(9,96)\qquad v(x,B)=*\int_{^*R^n} k(x-z)f(z)dz。$$

如果设f(x)连续，有界变化和具紧致支撑，则成立

$$(9,97)\qquad st(\Delta v(x,B))=f(x)。$$

即 v(x,B)是（9，92）的***M** 近似解。

对于数学物理方程基本解的表示能力，是对各种广义函数理论好坏的试金石。这里所提供的表示的特点是：具体，清晰，严格，简单，并与物理学保持高度的一致性。

10

结束语

——微积分学仍然是个“婴儿”



众所周知，微积分学博大精深，丰富多采和应用广泛，似乎已经非常成熟了，其实不然。虽然从它的诞生（Newton 在 1665 和 Leibniz 在1673）到现在已跨越了四个世纪，但它仍然只是一个婴儿。

微积分学的思想基础是人类对“无限”的认识。从墨翟（480-420B．C．），Democritus（460-362B．C．）和 Aristotle（384-322B．C．）等正式引入无限的概念，到 Newton-Leibniz 正式发明微积分学，经历了大约二十一个世纪，只仅是微积分学的孕育时期。然后从微积分学的出生到现在已经历四个世纪，但

与它的孕育期相比还只能算一个婴儿。到二十世纪六十年代，经过 Robinson 的工作使无限的概念在微积分学中合法化。这就是说，微积分学已经认识自己的母亲了，已经不是初生的婴儿，而是几个月的孩子了。

从另一方面说，微积分学首先把无限作为数学研究的主要对象。我们知道，不但个人的生命是有限的，而且人类的生存史也是很有限的，但现在所面临的研究对象却是无限。虽然我们取得了很大的成绩，研究起来也非常热闹。但从历史的观点来看，可能只是呱呱儿啼，虽然非常可爱，充满生命力，但还很难说是成熟的，不能作过高的估计，更不能自满自足。我们应当相信，更美好的和更大的发展还在前面。

为了说明这一点，我们举出一个例子。在现在一般人的眼里，标准分析似乎是很成熟了。但实际上，标准分析只是人类对无限的初步描述，有些地方还是很粗糙的，需要进一步改进。

现在大多数家庭都使用电灯。我们都知道，打开电源，电灯才会亮。在打开电源之前，电灯不会亮。但在现在通用的线性传输理

论中，根据标准分析和 Schwarz 的广义函数论进行计算，竟推导出提前响应。这就是说，从这种计算推出，在电源打开之前，电灯已经亮了。这违反普通常识，且长期得不到合理解释。1986 年谭天荣利用作者的两相微积分和 Delta 函数论，对此作出了一个解释，详见[37]，今介绍如下。

按照线性传输理论，输入 f(t) 和它的响应 $\overline{f}(t)$ 之间成立下述关系

$$(10,1)\quad \overline{f}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}K(\omega)e^{i\varphi(\omega)}\,d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\omega(t-x)}\,dx,$$

其中 $K(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$ 是系统特征。在过去的理论中，对于某些系统，竟由（10，1）得到提前响应，这是违反因果律的。因此，过去认为一个系统能够被实现当且仅当它的特征满足以下条件

$$(10,2)\quad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}K(\omega)\cos\big(\omega t+\varphi(\omega)\big)d\omega=0，当\ t<0。$$

但是，众所周知，“空系统”是可实现的，它的特征为

$$(10,3)\quad K(\omega)=1\ 和\ \varphi(\omega)=0。$$

这个特征并不满足(10，2)。事实上，将(10,3)代入（10，2）右端，我们得到

$$(10,4)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cos\omega t d\omega = \lim_{P\to+\infty}\frac{\sin pt}{\pi t}\neq 0,$$

即（10，2）不成立。

现在我们研究一个矩形脉冲

$$(10,5)\qquad \delta_{21}(t,n)=\begin{cases} n, & 0<t<1/n,\\ n/2, & t=0 \text{ 或 } t=\frac{1}{n},\\ 0, & t<0 \text{ 或 } \frac{1}{n}<t, \end{cases}$$

其中 n 是无限大自然数，即 $n\in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$。如果将（10，1）转移到*M，把系统取为空系统，即系统特征为(10，3)，然后在其中代替 f(t) 我们把输入取为 $\delta_{21}(t,n)$，我们得到它的响应为

$$(10,6)\quad \overline{\delta_{21}}(t,\ n)=\frac{1}{2\pi}*\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega*\times \int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{21}(x,n)e^{i\omega(t-x)}dx$$

$$=\delta_{21}(t,n)$$

在这里没有任何提前响应，输出和输入相同，完全符合空系统的实际情况。

但是按照过去的理论，$\delta_{21}(t,n)$ 是 Delta 函数，它具有积分性质

$$(10,7)\quad \text{老的 } F_{21}(\omega,n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{21}(t,n)e^{-i\omega x}dx = 1$$

将它和空系统的特征（10，3）代入（10,1），我们按老的理论得到其响应为

$$(10,8)\quad \text{老的 } \overline{\delta_{21}}(t,n)=\frac{1}{2\pi}\lim_{P\to+\infty}\int_{-P}^{P}e^{i\omega t}d\omega = \lim_{P\to+\infty}\frac{\sin pt}{\pi t},$$

或者等价地表示为

$$(10,9)\quad \text{老的 } \overline{\delta}_{21}(t,n)=\frac{1}{2\pi}*\int_{-B}^{B}e^{i\omega t}d\omega = \frac{\sin Bt}{\pi t},$$

可取 B 是无限大的自然数。当 $t<0$，由(10,6)得到$\overline{\delta_{21}}(t,\ n)=\delta_{21}(t,\ n)=0$，这与事实相符；但由（10，8）或（10，9）可看出一般地老的$\overline{\delta_{21}}(t,\ n)\neq 0$，这就有提前响应，与事实不符。

显然，这个提前响应的根源是由于使用了老的 Delta 函数理论，在其中把公式（10,7）当作普遍规律。其实，（10,7）在此时还不够精确，更好的积分公式应当是

$$(10,10)\quad F_{21}(\omega,n)=*\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{21}(x,n)e^{-i\omega x}dx$$

$$=\frac{n(1-e^{-i\omega/n})}{i\omega}.$$

由此可推得（10,6），就不会产生提前响应。

由此，在物理上可以看出，条件（10,2）应当加以修正。

以上是谭天荣同志所作的工作。实际上，这是一个关于 Delta 函数个性理论的重要例子。我们不能象在 Schwarz 的广义函数论中那样把（10,7）看成普遍公式加以使用。更精确的公式是（10,10）。虽然我们有

$$(10,11)\qquad \mathrm{st}\{F_{21}(\omega,n)\}=\text{老的 } F_{21}(\omega,n)=1.$$

在这里提供了一个宝贵的例子，一个通常被忽略的无限小误差竟然会引起明显的差别。

我们还可以从数学上进一步分析。不难看出

$$(10,12)\qquad F_{21}(\omega,+\infty)=U_2\lim_{l\to+\infty}F_{21}(\omega,k)$$

$$=U_2\lim_{k\to+\infty}\frac{k\left[1-\cos\frac{\omega}{k}+i\sin\frac{\omega}{k}\right]}{i\omega}$$

$$=1-0_{+}(1+i),$$

其中 $\omega\in(-\infty,\ +\infty)\cap{}^{*}\mathbf{R}$.

在标准分析中，以下公式

$$(10,13)\qquad F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$= \text{Stieltjes} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} d\theta(x) = 1,$$

似乎被看成永恒的真理，自然成为 Schwarz 广义函数论的一个基本内容。但很难想到，公式（10，13）仍然不够精确，只是忽略了一阶无限小的零阶近似。如（10，12）所表示，在这里忽略了潜在无限小 $0_+(1+i)$。

在这里我们必须再回顾一下 Von Neumann 的名言"必须改变的是数学技巧而不是物理理论。"如果按照过去标准分析中以 Schwarz 为代表的 Delta 函数论去进行计算，会出现提前响应，这违反物理上的因果律。所以过去的这种数学技巧必须加以改变。

从这里还可看出，标准分析尚是不成熟的，以致在线性传输理论中用它进行计算，竟会出现提前响应这种违反物理事实的结果。标准分析还是个婴儿，整个微积分学也如此。我们千万不能自满自足。这个理论前途远大，也很美好。我们应当前仆后继，不断奋斗！

参考文献

〔1〕菲赫金哥尔茨，《微积分学教程》，商务印书馆。

〔2〕关肇直，“数学推理的严格性与认识论中的实践标准”，《数学学报》，19卷1期。
〔3〕盖尔芳特与希洛夫，《广义函数》，科学出版社，1965。
〔4〕黄乘规，“两相微积分学”，华中工学院学报，1979，No. 4.
〔5〕石最坚与黄乘规，“关于 Delta 函数的奇异性”，华中工学院学报，1980，No. 2.
〔6〕黄乘规，“论单位阶跃函数的非标准谱函数”，湘潭师专学报，1982，No. 1.
〔7〕黄乘规，“关于‘无限’与微积分学基础的历史”，天津师大学报，数学专辑，1985.
〔8〕黄乘规，《两相微积分学》，天津科技出版社，1984。
〔9〕黄乘规，“从非标准分析到量子力学”，数学季刊，1986，No. 2.
〔10〕胡世华，“古典谓词演算”，数学进展，第7卷，第四期。
〔11〕卡尔台龙《奇异积分算子》上海科技出版社。
〔12〕柯朗和希尔伯特，《数学物理方法》，科学出版社。
〔13〕拉甫伦捷也夫，《复变函数论方法》，高教出版社。
〔14〕雷日克，《函数表与积分表》高教出版社。
〔15〕列别捷夫，《特殊函数及其应用》高教出版社。
〔16〕米库辛斯基，《算符演算》1959
〔17〕史捷班诺夫，《微分方程教程》，高教出版

社。
〔18〕史宗登，《傅里叶变换》科学出版社，1958。
〔19〕谭天荣，“单位阶跃函数的谱函数问题”，湘潭师专学报，1980，No. 2。
〔20〕谭天荣，“再谈单位阶跃函数的谱函数问题”，湘潭师专学报，1981，No. 2。
〔21〕王进儒，“Dirac Delta 函数与无穷小分析，”华南工学院学报，1980，3.
〔22〕希尔伯脱和阿克曼，《数理逻辑基础》1958。
〔23〕袁萌，“非标准分析及其应用简介”，《自然科学争鸣》，1977. 2。
〔24〕袁萌，“什么是非标准分析”，《自然科学争鸣》，1977，4。
〔25〕伊凡宁柯，《经典场论》，科学出版社，1958。
〔26〕张锦文，“数理逻辑与微积分的逻辑基础”，河南新乡师院，1978。
〔27〕张锦文，“点的可分性与非标准分析”，《自然科学争鸣》，1977，2。
〔28〕张锦文，“非标准分析，——当代数学的一个新领域”，《自然科学争鸣》，1977，4。
〔29〕张锦文，“用力迫法构造的一个非标准的算术模型”，华中工学院学报，1979，No. 1.
〔30〕李邦河，“非标准分析与广义函数的乘法”，中国科学，1978 年 No. 1——No. 2.
〔31〕中国科学院数学所资料室，数学的历史，逻辑和基础资料选辑，非标准分析，1976。
〔32〕周世勋，《量子力学教程》，人教出版社。
〔33〕朱洪元，《量子场论》，科学出版社，1960。

〔34〕P. A. M. 狄拉克，《量子力学原理》，科学出版社，1979.
〔35〕M. 克莱因，《古今数学思想》，上海科技出版社，1979.
〔36〕卡尔. B. 波耶，《微积分概念史》，上海人民出版社，1977.
〔37〕谭天荣，“关于提早响应的一项注记”，数学季刊，1986，No. 1.
〔38〕张恭庆，“关于广义函数的一些历史资料”，北京大学讲义，1974.
〔39〕周毓麟，“非线性椭圆型方程与非线性抛物型方程”，北京大学讲义，1957.
〔40〕吉尔巴格与塔丁格，《二阶椭圆型偏微分方程》上海科技出版社.
〔41〕孙贻让，《墨子闲诂》.
〔42〕爱尔台里，《高级超越函数》，上海科技出版社。
〔43〕格涅坚科，《概率论教程》，高教出版社。
〔44〕博赫涅尔和坎得拉赛哈兰，《傅立叶变式》，高教出版社.
〔45〕张锦文，《集合论与连续统假设浅说》，上海教育出版社.
〔46〕梁昆淼，《数学物理方法》，人教出版社.
〔47〕那汤松，《实变函数论》，商务印书馆，1953
〔48〕Agmon, S, Douglis, A. and L. Nirenberg, Estimates near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary

Conditions, Comm. Pure Appl. Math. 12, pp. 623-727, 1959, 17, pp 35-92.

[49] Auther M. Jaffe, Appendix C, Ordering the Universe, The Role of Mathematics. (Renewing U. S, Mathematics: Critical Resourse for the Future), Notices of the AMS, Oct. 1984 issue 236.

[50] Bernstein, Allen R., A Nonstandard Thtegyation Theo y for Unbounded Functions, S. Math. Logik Grundlogen Math, 20 (1974), 97-108.

[51] Bernstein, Allen R., and Peter A. Loeb, A Nonstandard Integration Theory for Unbounded Functions, Unv. victoria, 1972.

[52] Bjorken J. D. and S.D. Drell, Relative Quantum Mechanics McGrawHill Book Company, 1964.

[53] Bjorken J, D. and S. D. Drell, Relativistic Quantum Fields, McGrawHill Book Co. 1965.

[54] Bochner, S., Book Review on L. Schwarz: "Theorie des Distributions", Bulletin of AMS 58 (1952), pp. 78-85, & Book Review on Halperin, I., "Introduction to Theory of Distributions", Bulletin of AMS 58 (1952), pp 679-680

〔55〕 Bohr H.,Address of proffessor Harald Bohr, 1950.

〔56〕 Chang C.C.and Keisler,Model Theory, 1973.

〔57〕 Church, A.,Introduction to Mathematical Logic, vol. I, 1956.

〔58〕 Dirac, The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics,Proc. of Royal Society,London A (1926-1927) vol.113, pp. 621-641.

〔59〕 Dirac, Quantum Mechanics, 21, April 1947.

〔60〕 Ditkin, V. A., A Table of Operator Calculus, Moscow, 1965.

〔61〕 Ditkin, V. A.,and A. P. Prudnikov, Operator Calculus, Moscow, 1966.

〔62〕 Douglis and L. Nirenberg, Interier Estimates for Elliptic Systems of partial Differential Equations, Comm. Pure Appl. Math. No. 8, pp. 503-538, 1955.

〔63〕 Edward G.Harris, Introduction to Modern Theoretical physics, 1975.

〔64〕 Fritz John, plane Waves and Spherical Means Applied to partial Differential Equations, New York University, New Rochelle, September, 1955.

〔65〕 Gino Moretti, Functions of A Complex Variable, 1964.

[66] Gradshteyn and Ryzhik, Table of Integrals, Series and products, 1980.

[67] Heaviside, O.,On Operators in Mathematical Physics, Pro. of Royal Society 52 (1893),pp. 504-529.

[68] Hermite, M., Cours de M. Hermite, Paris 1887.

[69] Jean Francois Colombeau, New Generalized Functions and Multiplication of Distributions, 1984, North-Holland.

[70] Keisler, H. I., Elementary Calculus. 1975.

[71] Kreina, S. G., Functional Analysis, SMB, Mescow, 1964.

[72] Langdao and Lifshci, Quantum Mechanics.

[73] Lightstone, A. H., and Wang Kam, Dirac Delta Functions via Nonstandard Analysis, Canad. Math. Bull.,1975.

[74] Martin Davis, Applied Nonstandard Analysis, New yorK, November,1976.

[75] Martin Davis and Reuben Hersh. Nonstandard Analysis,Scientific American, 1972.

[76] Osdol, D. H. Van,Truth with Respect to An Ultrafilter or How to make Intuition Rigorous, Amer. Math. Monthly 19 (1972) .

[77] Philip Hartman, Ordinary Differential Equations.

[78] Raju CK., Products and Compositions with the Dirac Delta Functions, Journal of physics A: Mathematical and General. vol. 15, No. 2, February, 1982.

[79] Robinson, A., Nonstandard Analysis, Nederl. AKad. Wetensh. proc. Ser. A 64, (1961), 432-440.

[80] Robinson, A., Nonstandard Analysis, 1974.

[81] Schwarz. L., Theorie des Distributions, I, II, paris 1950-1951.

[82] Shoenfield, J, R., Mathematical Logic, 1967.

[83] Skoloem, TH., peano's Axioms and Modele of Arithmetic, Studies in Logic, 1955.

[84] Sobolev, S. L., Methode Nouvelle a Resoudre le Probleme de Cauchy pour les Equations Lineares Hyperboliques Normales, Mat. sb. No. 1 (43). 1936, 39-72.

[85] Sobolev, S. L., Sur un Theoreme d'Analyse Fonctionnelle, Mat. sb. 4, 1938, pp471-496.

[86] Steen, L. A., New Models of the Real Number Line, Scientific Amer., 1971.

〔87〕Tan Tianrong, On Advanced Response, Abstracts of the AMS, Reference 86T-78-39.88.

〔88〕Thurbcr, James K. and Katz, Jose; Applications of Fractional powers of Delta Functions, Victoria Symposium on Nonstandard Analysis, pp272-302.

〔89〕Vladdimirov, V. S., Generallized Functions in Mathematical physics, Mir Publishers Moscow, 1979.

〔90〕Von Neumann, J., Mathematishe Grundlagen der Quantummechanik, 1932.

〔91〕Yvonne Choquet-Bruhat, Cecile Dewitt-Morette and Margret Dillard-Bleik, Analysis, Maniford and physics, AMSTERDAM, 1977.

〔92〕Huang Chenggui, Twophase Calculus, 1986，天津师大讲义。

[General Information]
书名=δ函数新理论
作者=黄乘规
页数=160
SS号=10069412
DX号=
出版日期=1992年06月第1版
出版社=陕西科学技术出版社